



ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของสองจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1

โยธิน ใจอ่อน¹, ยุวเรศ งามทรง² และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์^{3*}

Generalized Beauty: the Product of Two Numbers that Every Digit is 1

Yotin Jaiorn¹, Yuwaret Ngamsong² and Aiyared Iampan^{3*}

^{1,2,3} สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อำเภอเมือง จังหวัดพะเยา 56000

^{1,2,3} Department of Mathematics, School of Science, University of Phayao, Mueang, Phayao 56000

* Corresponding author. E-mail address: aiyared.ia@up.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวน n หลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวน m หลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยที่ $2 \leq n \leq m$ ผลการศึกษารูปทั่วไปของผลคูณดังกล่าว ดังนี้

$$1_{[n]} \times 1_{[m]} = 123 \dots (n-1) \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=m-n+1} (n-1) \dots 321$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n โดยที่ $2 \leq n \leq m$

คำสำคัญ: ผลคูณ จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1

Abstract

This paper presents the study and finding on a general form of a product of the n -digit number that every digit is 1 and the m -digit number that every digit is 1 where $2 \leq n \leq m$. The results show that a general form of the product is

$$1_{[n]} \times 1_{[m]} = 123 \dots (n-1) \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=m-n+1} (n-1) \dots 321$$

for all positive integers m and n where $2 \leq n \leq m$.

Keywords: product, number that every digit as 1

บทนำ

ในความคิดของใครหลาย ๆ คน คณิตศาสตร์น่าจะเป็นวิชาที่น่ากลัว ยุ่งยาก ซับซ้อน ไม่น่าเรียน และไม่อยากจะพบเจอ แต่ทุกคนก็ยากที่จะหลีกเลี่ยงไปได้ เพราะคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์หนึ่งที่สำคัญและใกล้ชิดเราสำหรับการดำรงชีวิตประจำวัน ความน่ากลัวของคณิตศาสตร์ที่ฝังอยู่ในความคิดของใครหลาย ๆ คน ซึ่งไม่อาจรับรู้ได้เลยว่าในความน่ากลัวนั้นได้แฝงไว้ด้วยความสวยงามและประโยชน์ของศาสตร์นี้ ความสวยงามของคณิตศาสตร์ที่เราพบเห็นกันได้บ่อย ๆ ก็ทั้งจากหนังสือ แหล่งอินเทอร์เน็ต และตามสื่อต่าง ๆ โดย

บางครั้งเราสังเกตเห็นความสัมพันธ์ได้ง่าย บางครั้งเราก็สังเกตเห็นความสัมพันธ์ได้ยาก หรือแม้กระทั่งเราคิดว่าไม่น่ามีความสัมพันธ์กันเลย จากการที่ผู้เขียนได้ศึกษาบทความวิจัยเบื้องต้น เรื่อง ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 (อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554, น. 29-35) ผู้เขียนได้เห็นถึงความสวยงามและประโยชน์ของของผลการศึกษานั้น ดังนั้นบทความนี้ผู้เขียนจะขยายผลการศึกษามาของบทความข้างต้น โดยจะศึกษาและแสดงความสัมพันธ์ของผลคูณของจำนวน n หลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 กับจำนวน m หลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยที่ $2 \leq n \leq m$ สำหรับ



การศึกษาและหารูปทั่วไปทางพีชคณิตของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 นั้น ได้มีการศึกษาในหลายรูปแบบ โดยได้ประยุกต์ใช้จำนวนเศษเหลือ ดังนี้ เมื่อปี พ.ศ. 2554 อัยเรศ (2554, น. 29-35) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 โดยได้พบว่าผลการยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 นี้สามารถเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\underbrace{(111\dots1)^2}_{\#(1)=n} = 123\dots(n-1)n(n-1)\dots321$$

ธีระยุทธ ชมชื่น และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2555, น. 1-10) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่าผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m แทนเลขหลักสิบและ n แทนเลขหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+n \leq 9$ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=p} \times n = \underbrace{nnn\dots n}_{\#(n)=p} \text{ และ } \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=p} \times (-n) = \underbrace{(-n)(-n)(-n)\dots(-n)}_{\#(-n)=p}$$

ธีระยุทธ ชมชื่น และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556, น. 61-71) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยได้พบว่าผลคูณนี้ สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้

$${}_q p \parallel_s r \times \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=n} = {}_q p {}_q p \underbrace{({}_q p \boxplus_s r)({}_q p \boxplus_s r)({}_q p \boxplus_s r)\dots({}_q p \boxplus_s r)}_{\#({}_q p \boxplus_s r)=n-2} {}_s r {}_s r$$

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556, น. 919-927) ได้ศึกษาและหาความสัมพันธ์ของจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 กับสมการเชิงเส้น โดยได้พบว่าความสัมพันธ์นี้สามารถ

$$mn \times \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k} = m \underbrace{(m+n)(m+n)\dots(m+n)}_{\#(m+n)=k-1} n$$

กำหนดให้ m แทนเลขหลักสิบและ n แทนเลขหลักหน่วยของจำนวนสองหลัก mn โดยที่ $m+1=t, m+n=r, s$ และ $10 \leq m+n \leq 18$ จะได้ว่า

$$mn \times \underbrace{111\dots1}_{\#(1)=k} = (m+1) \underbrace{(r+s)(r+s)\dots(r+s)}_{\#(r+s)=k-2} sn$$

นิคม หวลอารมณ์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2556, น. 51-58) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนเต็มใด ๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน โดยในกรณีเฉพาะเป็นจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 นั้น สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n และ p เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

กำหนดให้ q, p, s และ r เป็นจำนวนนับ โดยที่ $qp sr = {}_q p \parallel_s r$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geq 2$ จะได้ว่า

เขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=n} = 9 \times [123\dots(n-3)(n-2)(n-1)] + n$$



กรกนก ชุมภูรัตน์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2557) ได้ศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับพหุคูณของเลขโดด 9 โดยได้พบว่า

ผลคูณนี้สามารถเขียนในรูปทั่วไปได้ ดังนี้ กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$n \times 9 \times \underbrace{111 \dots 1}_{\#(1)=m} = (n-1) \underbrace{999 \dots 9}_{\#(9)=m-1} (10-n)$$

บทความนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวน n หลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 จำนวนกับจำนวน m หลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1 โดยที่ $2 \leq n \leq m$ โดยเครื่องมือหลักที่เราใช้ในการสร้างจำนวนเศษเหลือ และพิสูจน์ทฤษฎีบทหลัก ได้แก่ ขั้นตอนวิธีการหาร และหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 ขั้นตอนวิธีการหาร (The Division Algorithm) (Clark, 2002) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$a = b \cdot q + r \text{ และ } 0 \leq r < |b|$$

ทฤษฎีบท 2 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (The Principle of Mathematical Induction) (Clark, 2002) กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความเกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก n และกำหนดให้ n_0 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้

$P(n_0)$ เป็นจริง

2. ถ้า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \geq n_0$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq n_0$

ต่อไปจะแนะนำให้รู้จักกับจำนวนเศษเหลือ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญสำหรับการศึกษาของบทความนี้

จากขั้นตอนวิธีการหาร (อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554, น.29-35) และ (ณัฐวุฒิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, น. 25-30) ได้นิยามจำนวนเศษเหลือ (remainder number) ไว้ดังนี้ กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ และ $b=10$ ทำให้ได้ว่ามีผลหาร q และเศษเหลือ r ซึ่งจะได้ $a=10 \cdot q + r$ และ $0 \leq r < 10$ นั่นคือ r เป็นเลขโดด นิยาม

$$a := {}_q r \quad (1)$$

เช่น

$$\begin{array}{ccccc} 0 = {}_0 0 & 20 = {}_2 0 & 60 = {}_6 0 & 180 = {}_{18} 0 & 200 = {}_{20} 0 \\ 1 = {}_0 1 & 21 = {}_2 1 & 61 = {}_6 1 & 181 = {}_{18} 1 & 201 = {}_{20} 1 \\ 2 = {}_0 2 & 22 = {}_2 2 & 62 = {}_6 2 & 182 = {}_{18} 2 & 202 = {}_{20} 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 9 = {}_0 9 & 29 = {}_2 9 & 69 = {}_6 9 & 189 = {}_{18} 9 & 209 = {}_{20} 9 \end{array}$$

และ

$$\begin{array}{ccccc} 0 = {}_0 0 & -20 = {}_{-2} 0 & -60 = {}_{-6} 0 & -180 = {}_{-18} 0 & -200 = {}_{-20} 0 \\ -1 = {}_{-1} 9 & -21 = {}_{-3} 9 & -61 = {}_{-7} 9 & -181 = {}_{-19} 9 & -201 = {}_{-21} 9 \\ -2 = {}_{-1} 8 & -22 = {}_{-3} 8 & -62 = {}_{-7} 8 & -182 = {}_{-19} 8 & -202 = {}_{-21} 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -9 = {}_{-1} 1 & -29 = {}_{-3} 1 & -69 = {}_{-7} 1 & -189 = {}_{-19} 1 & -209 = {}_{-21} 1 \end{array}$$



เพื่อความสะดวก ยังคงจะเขียน ${}_0r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0 \leq r < 10$

บทนิยาม 1 (ณัฐภูมิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, น. 25-30) กำหนดให้ ${}_Z\mathcal{R}$ แทนเซตของจำนวนใน (1) ทั้งหมด นั่นคือ

$${}_Z\mathcal{R} = \{{}_q r \mid q, r \in \mathbb{Z} \text{ และ } 0 \leq r < 10\} \quad (2)$$

และเราจะเรียกสมาชิกของ ${}_Z\mathcal{R}$ ว่า จำนวนเศษเหลือ (remainder number) เพื่อให้เข้าใจในผลลัพธ์ของการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทจากบทความนี้ จะแนะนำการแปลงจำนวนเศษเหลือที่ได้จาก (1) กลับเป็นเลขฐานสิบปกติ เนื่องจากจำนวนเศษเหลือเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักอาจจะไม่ใช่เลขโดด ซึ่งมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบ แต่จำนวนในระบบเลขฐานสิบเป็นจำนวนที่เลขในแต่ละหลักเป็นเลขโดด และจากหลักการบวกเลขปกติ หากผลบวกมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับสิบและเขียนเป็นจำนวนเศษ

เหลือ ${}_q r$ เมื่อ q คือผลหาร และ r คือเศษเหลือ (เลขโดด) จากการหารด้วยเลข 10 แล้วนำผลหาร q ไปทดที่หลักหน้า ฉะนั้นจึงสรุปเป็นวิธีการแปลงจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบปกติได้โดยการบวกทดเลขเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย ซึ่งก็คือการทดเลขปกตินั่นเอง เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $24_{11}0204_25_{36}253_{65}55$ ที่ได้จากการเรียงกันของจำนวนเศษเหลือกลับเป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$\begin{aligned} 24_{11}0204_25_{36}253_{65}55 &= 2(4+11)020(4+2)(5+36)25(3+65)55 \\ &= 2(15)0206(41)25(68)55 \\ &= 2_150206_4125_6855 \\ &= (2+1)5020(6+4)12(5+6)855 \\ &= 35020(10)12(11)855 \\ &= 35020_1012_11855 \\ &= 3502(0+1)01(2+1)1855 \\ &= 350210131855 \end{aligned}$$

การแปลงจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นจะสังเกตเห็นว่าทำได้ง่าย แต่หากจะแปลงจำนวนเต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือนั้นทำได้ไม่ถนัด ดังนั้นบทตั้ง 1 (ณัฐภูมิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, น. 25-30) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับการแปลงจำนวน

เต็มลบเป็นจำนวนเศษเหลือ โดยได้แสดงให้เห็นถึงลักษณะของจำนวนเศษเหลือของจำนวนเต็มลบด้วย และได้นิยามการดำเนินการทวิภาค (binary operation) $\boxplus$ บน ${}_Z\mathcal{R}$ โดย

$${}_q r \boxplus {}_t s = \begin{cases} {}_{q+t}(r+s); & 0 \leq r+s \leq 9 \\ {}_{(q+t)+b} a & ; \quad r+s \geq 10, r+s = {}_b a \end{cases} \text{ สำหรับทุก } {}_q r, {}_t s \in {}_Z\mathcal{R}$$

บทตั้ง 1 (ณัฐภูมิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, น. 25-30) กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = {}_q r$ แล้ว

$$-n = \begin{cases} -{}_q 0 & ; r = 0 \\ -{}_{(q+1)}(10-r) & ; r \neq 0 \end{cases} \quad (3)$$



ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, น. 48-58) มีประโยชน์อย่างมากสำหรับบทความนี้ ซึ่งกล่าวไว้ดังนี้

$$1_{[n]} = \underbrace{111\dots 1}_{\#(1)=n} \quad (5)$$

ทฤษฎีบท 3 (อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2556, น. 48-58) กำหนดให้

บทตั้ง 2 (อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554, น. 29-35) สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ จะได้ว่า

$$1_{[n]} = 10^{n-1} + 1_{[n-1]} \quad (6)$$

$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, m \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $0 \leq s_i \leq 9$ จะได้ว่า

$$m s_1 s_2 s_3 \dots s_n = m \cdot \underbrace{1000\dots 0}_{\#(0)=n} + s_1 s_2 s_3 \dots s_n \quad (4)$$

บทนิยาม 2 และบทตั้ง 2 เพิ่มความสะดวกและมีประโยชน์อย่างมากสำหรับการศึกษาในบทความนี้

บทนิยาม 2 (อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554, น. 29-35) สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n นิยาม

ผลการศึกษา

จากการสังเกตลักษณะทางพีชคณิตของผลคูณของจำนวน $1_{[n]}$ กับจำนวน $1_{[m]}$ โดยที่ $2 \leq n \leq m$ ทำให้เราพบความสัมพันธ์ของผลลัพธ์ที่มีลักษณะน่าสนใจ เมื่อ $n = 4$ และ $m = 4, 5, 6, \dots, 9$ ดังนี้

$$\begin{array}{llll} 1_{[4]} \times 1_{[4]} & = & 123\textcolor{red}{4}321 & : \#(4) = 1 = 4 - 4 + 1 \\ 1_{[4]} \times 1_{[5]} & = & 123\textcolor{red}{44}321 & : \#(4) = 2 = 5 - 4 + 1 \\ 1_{[4]} \times 1_{[6]} & = & 123\textcolor{red}{444}321 & : \#(4) = 3 = 6 - 4 + 1 \\ 1_{[4]} \times 1_{[7]} & = & 123\textcolor{red}{4444}321 & : \#(4) = 4 = 7 - 4 + 1 \\ 1_{[4]} \times 1_{[8]} & = & 123\textcolor{red}{44444}321 & : \#(4) = 5 = 8 - 4 + 1 \\ 1_{[4]} \times 1_{[9]} & = & 123\textcolor{red}{444444}321 & : \#(4) = 6 = 9 - 4 + 1 \end{array} \quad (6)$$

จากความสัมพันธ์ใน (7) เราสังเกตเห็นความสัมพันธ์ของผลลัพธ์ที่มีลักษณะน่าสนใจของผลคูณของจำนวน $1_{[4]}$ กับจำนวน $1_{[m]}$ โดยที่ $m = 4, 5, 6, \dots, 9$ และเราสามารถเขียนในรูปทั่วไปจากข้อสังเกตได้ดังนี้

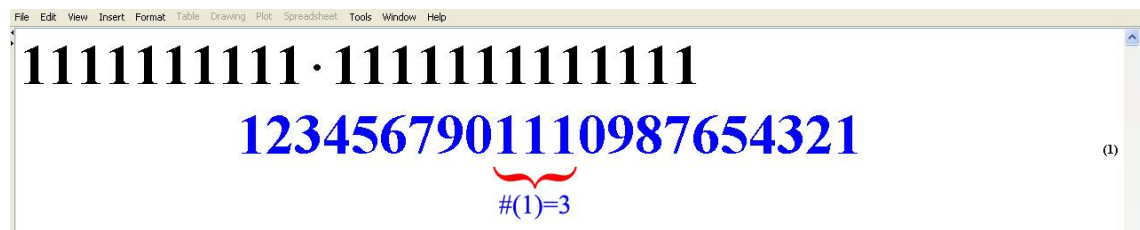
$$1_{[4]} \times 1_{[m]} = 123\textcolor{red}{444\dots 4}321 \quad \#(4)=m-4+1$$

ต่อไปจะแสดงตัวอย่างเพื่อนำไปสู่การศึกษาและหารูปทั่วไปของผลคูณของจำนวน $1_{[n]}$ กับจำนวน $1_{[m]}$ โดยที่ $2 \leq n \leq m$ ดังนี้

ตัวอย่าง 1 ผลลัพธ์ของ $1_{[10]} \times 1_{[13]}$ สามารถหาได้ถูกต้องและสอดคล้องกับความสัมพันธ์ (6) ที่เราพบ ดังนี้

$$\begin{aligned} 1_{[10]} \times 1_{[13]} &= 123456789(10)(10)(10)(10)987654321 \\ &= 123456789_1 0_1 0_1 0_1 0987654321 \\ &= 12345678(9+1)(0+1)(0+1)(0+1)0987654321 \\ &= 12345678(10)11109876543321 \\ &= 12345678_1 011109876543321 \\ &= 1234567(8+1)011109876543321 \\ &= 1234567901110987654321 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบจากการคำนวณโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 1: $1_{[10]} \times 1_{[13]}$

ฉะนั้น จากความสัมพันธ์ (6) เราจึงสรุปเป็นข้อสงสัยได้ดังต่อไปนี้

1. เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวน $1_{[n]}$ กับจำนวน $1_{[m]}$ โดยที่ $2 \leq n \leq m$ ได้หรือไม่

2. หากเราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณนี้ได้ แล้วรูปทั่วไปของผลคูณนี้จะมีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (6) ที่เราพบหรือไม่

ทฤษฎีบท 5 เป็นทฤษฎีบทหลักของบทความนี้ ซึ่งจะตอบข้อสงสัยข้างต้นของเราได้ และเป็นการขยายผลการศึกษาของอัยเรศ เอี่ยมพันธ์ (2554, น. 29-35) ที่ได้นำเสนอไว้ในทฤษฎีบท 4 ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4 (อัยเรศ เอี่ยมพันธ์, 2554, น. 29-35) สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จะได้ว่า

$$(1_{[n]})^2 = 123 \dots (n-1)n(n-1) \dots 321 \quad (7)$$

ทฤษฎีบท 5 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n โดยที่ $2 \leq n \leq m$ จะได้ว่า

$$1_{[n]} \times 1_{[m]} = 123 \dots (n-1) \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=m-n+1} (n-1) \dots 321 \quad (8)$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และกำหนดให้ $P(m)$ แทนข้อความ

$$1_{[n]} \times 1_{[m]} = 123 \dots (n-1) \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=m-n+1} (n-1) \dots 321$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m โดยที่ $2 \leq n \leq m$

ถ้า $m = n$ แล้ว $P(n)$ เป็นจริง โดยทฤษฎีบท 4 สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $k \geq n$ จะได้ว่า



$$1_{[n]} \times 1_{[k]} = 123 \dots (n-1) \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=k-n+1} (n-1) \dots 321$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} 1_{[n]} \times 1_{[k+1]} &= 1_{[n]} \times (10^k + 1_{[k]}) \\ &= (1_{[n]} \times 10^k) + (1_{[n]} \times 1_{[k]}) \quad (\text{โดยบทตั้ง 2}) \\ &= \underbrace{(111 \dots 1000 \dots 0)}_{\#(1)=n} + \underbrace{123 \dots (n-1) \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=k-n+1} (n-1) \dots 321}_{\#(0)=k} \\ &= \underbrace{1000 \dots 0}_{\#(0)=n+k} + \underbrace{111 \dots 1000 \dots 0}_{\#(1)=n-1} + \underbrace{123 \dots (n-1) \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=k-n+1} (n-1) \dots 321}_{\#(0)=k} \\ &= \underbrace{1000 \dots 0}_{\#(0)=n+k} + \underbrace{234 \dots n \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=k-n+1} (n-1) \dots 321}_{\#(1)=n-1} \\ &= \underbrace{1000 \dots 0}_{\#(0)=n+k} + \underbrace{234 \dots (n-1) \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=(k+1)-n+1} (n-1) \dots 321}_{\#(1)=n-1} \\ &= 1234 \dots (n-1) \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=(k+1)-n+1} (n-1) \dots 321 \\ &= 123 \dots (n-1) \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=(k+1)-n+1} (n-1) \dots 321 \end{aligned}$$

ฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง ดังนั้นโดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$1_{[n]} \times 1_{[m]} = 123 \dots (n-1) \underbrace{nnn \dots n}_{\#(n)=m-n+1} (n-1) \dots 321$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n โดยที่ $2 \leq n \leq m$

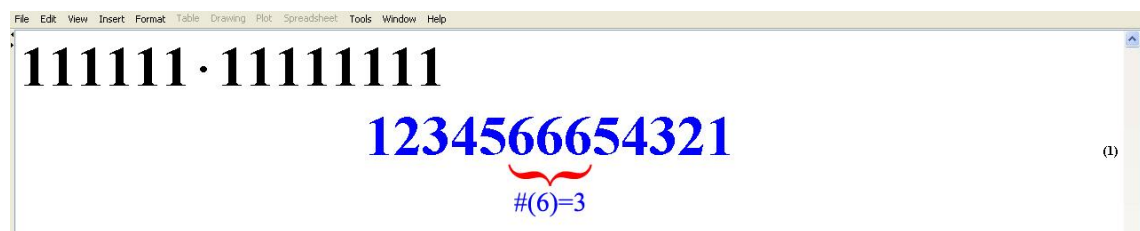
จากทฤษฎีบทข้างต้น เราสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาผลลัพธ์ได้ง่ายขึ้นดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2 จงหาผลลัพธ์ของ $1_{[6]} \times 1_{[8]}$

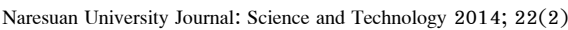
วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า

$$1_{[6]} \times 1_{[8]} = 12345 \underbrace{666}_{\#(6)=3} 54321$$

ตรวจคำตอบจากการคำนวณโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



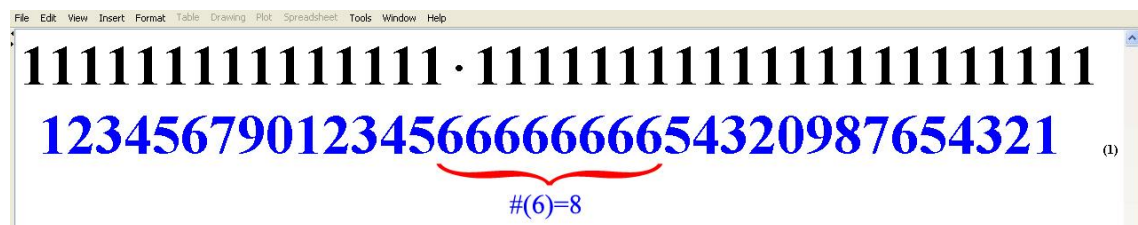
รูปที่ 2: $1_{[6]} \times 1_{[8]}$



วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1_{[15]} \times 1_{[22]} &= 123 \dots (14) \underbrace{(15)(15)(15) \dots (15)}_{\#(15)=8} (14) \dots 321 \\
&= 123 \dots 9_1 0_1 1_1 2_1 3_1 4_1 \underbrace{5_1 5_1 5_1 \dots 5_1}_{\#(15)=8} 4_1 3_1 2_1 1_1 09 \dots 321 \\
&= 12345678(10)12345 \underbrace{66666666}_{\#(6)=8} 54320987654321 \\
&= 12345678_1 012345 \underbrace{66666666}_{\#(6)=8} 54320987654321 \\
&= 12345679012345 \underbrace{66666666}_{\#(6)=8} 54320987654321
\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบจากการคำนวณโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์

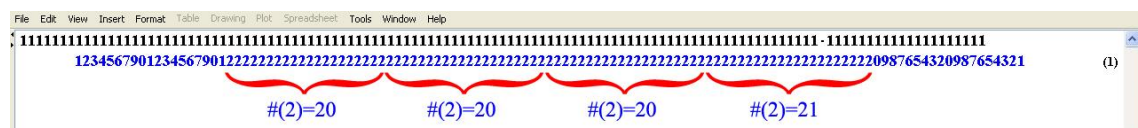


รูปที่ 3: $1_{[15]} \times 1_{[22]}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 5 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
1_{[100]} \times 1_{[20]} &= 1_{[20]} \times 1_{[100]} \\
&= 123 \dots (19) \underbrace{(20)(20)(20) \dots (20)}_{\#(20)=81} (19) \dots 321 \\
&= 123 \dots 1 \underbrace{9_2 0_2 0_2 0_2 \dots 0_2 9_1}_{\#(20)=81} \dots 321 \\
&= 1234567901234567901 \underbrace{222 \dots 2}_{\#(2)=81} 0987654320987654321
\end{aligned}$$

ตรวจคำตอบจากการคำนวณโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 4: $1_{[100]} \times 1_{[20]}$



บทสรุป

จากการศึกษาผลคูณของจำนวน $\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=n}$ กับจำนวน $\underbrace{111\dots1}_{\#(1)=m}$ โดยที่ $2 \leq n \leq m$ โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และจำนวนเศษเหลือเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ ทำให้ตอบข้อสงสัยข้างต้นทั้งสองข้อของเราได้ดังนี้

1. เราสามารถเขียนรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวน $1_{[n]}$ กับจำนวน $1_{[m]}$ โดยที่ $2 \leq n \leq m$ ได้ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 5 ดังนี้

$$1_{[n]} \times 1_{[m]} = 123\dots(n-1)\underbrace{nnn\dots n}_{\#(n)=m-n+1}(n-1)\dots321$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n โดยที่ $2 \leq n \leq m$

$$\begin{array}{llll} 3_{[2]} \times 3_{[2]} & = & 1089 & : \#(9) = 0 = 2 - 2 \\ 3_{[2]} \times 3_{[3]} & = & 10989 & : \#(9) = 1 = 3 - 2 \\ 3_{[2]} \times 3_{[4]} & = & 109989 & : \#(9) = 2 = 4 - 2 \\ 3_{[2]} \times 3_{[5]} & = & 1099989 & : \#(9) = 3 = 5 - 2 \\ 3_{[2]} \times 3_{[6]} & = & 10999989 & : \#(9) = 4 = 6 - 2 \\ 3_{[2]} \times 3_{[7]} & = & 109999989 & : \#(9) = 5 = 7 - 2 \end{array}$$

ด้วยเหตุนี้ หากผู้อ่านเริ่มทำการศึกษาลักษณะทางพีชคณิตของผลคูณของสองจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดดเช่นเดียวกับบทความนี้ก็คาดว่าจะได้สูตรการคำนวณเช่นกัน และสูตรที่ได้จากการศึกษาจะเป็นการช่วยเพิ่มความสะดวกในการคำนวณต่าง ๆ และนอกจากผลการศึกษาที่ได้แล้ว ผู้อ่านจะได้พบกับความสวยงามของคณิตศาสตร์

2. รูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณนี้ได้ตามทฤษฎีบท 5 นั้น มีลักษณะเหมือนกับความสัมพันธ์ (6) ที่เราพบ

ดังนั้น เราสามารถหาผลลัพธ์ของผลคูณของจำนวน $1_{[n]}$ กับจำนวน $1_{[m]}$ โดยที่ $2 \leq n \leq m$ ได้อย่างรวดเร็ว โดยไม่ต้องใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ หรือเครื่องคิดเลขในการช่วยหาผลลัพธ์ เพียงเรามีเครื่องมือที่เหมาะสม นั่นคือบทตั้งและทฤษฎีบทของบทความนี้เพียงเท่านั้น เราจึงจัดปัญหาความยุ่งยากในการคำนวณหาผลลัพธ์ อีกทั้งยังแสดงให้เห็นถึงความสวยงามของรูปทั่วไปที่แน่นอนของผลลัพธ์และการพิสูจน์ในแบบคณิตศาสตร์อีกด้วย

จากบทความนี้ ผู้อ่านสามารถศึกษาและหารูปทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของสองจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดดอื่นได้ จากการสังเกตผลคูณของสองจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 3 เช่นเดียวกับบทความนี้ ทำให้พบความสัมพันธ์ที่น่าสนใจ ดังนี้

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินบทความวิชาการทุกท่าน สำหรับข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์อย่างมากในการปรับปรุงบทความให้สำเร็จลุล่วงได้อย่างสมบูรณ์ โดยบทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย: Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA)



เอกสารอ้างอิง

กรกนก ชุมภูรัตน์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2557). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลขโดด 1 กับพหุคูณของเลขโดด 9. *วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏสงขลา*, 7(1), 64-74.

ณัฐภูมิ พลอาสา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การเริ่มต้นของกรุปของจำนวนเศษเหลือ. *วารสารนเรศวรพะเยา*, 6(1), 25-30.

นิคม หวลอารมณ์ และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนเต็มใด ๆ กับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นจำนวนเต็มเดียวกัน. *วารสารมหาวิทยาลัยทักษิณ*, 16(1), 51-58.

ธีระยุทธ ชมชื่น และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2555). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนสองหลักกับจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. *วารสารวิจัย มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม*, 8(15-16), 1-10.

ธีระยุทธ ชมชื่น และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: ผลคูณของจำนวนสามหลักและสี่หลักกับจำนวนหลายหลักที่ทุกหลักเป็นเลข 1. *วารสารมหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร*, 5(10), 61-71.

อภิสิทธิ์ เมืองมา และอัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การนิยามจำนวนหลายหลักที่แต่ละหลักเป็นจำนวนเต็ม. *วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุตรดิตถ์*, 8(2), 48-58.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2554). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1. *วารสารนเรศวรพะเยา*, 4(2), 29-35.

อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. (2556). ความสวยงามวางนัยทั่วไป: จำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และสมการเชิงเส้น. *วารสารวิทยาศาสตร์ มข*, 41(4), 919-927.

Clark, W. E. (2002). *Elementary Number Theory*. n.p.: Department of Mathematics, University of South Florida.