

การมีจริงและการประมาณค่าวิธีทำซ้ำของจุดตรึงของการส่งที่ไม่ขยาย และการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ

ศรศักดิ์ เทียนหวาน

Existence and Iterative Approximation of Fixed Points of Nonexpansive and Asymptotically Nonexpansive Mappings

Sornsak Thianwan

สำนักวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยนเรศวร พะเยา ต.แม่กา อ.เมือง จ.พะเยา 56000

School of Science and Technology, Naresuan Phayao University, Phayao 56000, Thailand.

Corresponding author. Email address: sornsakt@nu.ac.th (S. Thianwan)

Received 9 October 2008; 17 August 2009

บทสรุป

บทความนี้ เป็นการแนะนำสิ่งที่เกิดขึ้นของปัญหาการมีจริง และการประมาณค่าวิธีทำซ้ำของจุดตรึงของการส่งที่ไม่ขยาย และการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ ทฤษฎีบทการประมาณค่าวิธีทำซ้ำของจุดตรึงสำหรับการส่งที่ไม่ขยาย และการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับในปริภูมิบานาค บางทฤษฎีบทได้ถูกศึกษา และนำเสนอในบทความ

คำสำคัญ: การส่งที่ไม่ขยาย; การส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ; การส่งแบบหดตัว; การส่งแบบลิปชิตซ์; จุดตรึง

Summary

This article is to introduce the concept of the problem on the existence and iterative approximation of fixed points of nonexpansive and asymptotically nonexpansive mappings. Some iterative approximation theorems of fixed points for nonexpansive and asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces are studied and presented in the article.

Keywords: Nonexpansive mapping; Asymptotically nonexpansive mapping; Contraction mapping; Lipschitzian mapping; Fixed point

บทนำ

ทฤษฎีบทจุดตรึง (Fixed Point Theory) นับว่ามีบทบาทเป็นอย่างมาก ต่อการพัฒนาความเจริญก้าวหน้าทางวิชาการในทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสมัยใหม่ ปัญหาต่างๆ ในทางวิทยาศาสตร์ เมื่อสามารถแปลงได้ในรูปของตัวแบบทางคณิตศาสตร์ (mathematical model) ซึ่งอธิบายได้ในรูปของ สมการ อสมการ ระบบสมการ และระบบอสมการ ซึ่งส่วนใหญ่แล้ว ปัญหาที่ซับซ้อนก็มักจัดได้ในรูปของสมการไม่เชิงเส้น (nonlinear equation) โดยปัญหาใหญ่ 2 ปัญหาที่เกิดขึ้นตามมา คือ

1. สมการ และอสมการดังกล่าวมีคำตอบหรือไม่ นั่นคือ ปัญหาการมีจริงของคำตอบ (Existence Problem)

2. คำตอบเหล่านั้นหาได้อย่างไร

ในการแก้ปัญหามีคำตอบของสมการ หรือ อสมการ นั้น เมื่อนักคณิตศาสตร์ได้แปลงปัญหาให้อยู่ในรูปของสมการ หรือ อสมการของตัวดำเนินการ (operator) แล้ว ปรากฏว่า จุดตรึง (fixed point) ของตัวดำเนินการที่สร้างขึ้น ก็คือ คำตอบของสมการ หรือ อสมการที่กำลังสนใจนั่นเอง หลังจากเมื่อทราบ ว่า จุดตรึงของการส่งมีจริงแล้ว ก็มาถึงปัญหาที่ว่า เราจะหาจุดตรึงนั้นได้อย่างไร เรียกได้ว่าเป็นการประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง (approximation of fixed point)

ดังนั้น จึงมีนักคณิตศาสตร์กลุ่มใหญ่ได้พยายามสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ มากมาย เพื่อใช้ประมาณค่าจุดตรึงของการส่งนั้น ซึ่งก็หมายความว่า องค์ความรู้ทางทฤษฎีบทจุดตรึงสามารถตอบคำถามของสองปัญหาใหญ่ข้างต้นได้ ดังนั้น การพัฒนาและสร้างทฤษฎีใหม่ ๆ เพื่อตอบคำถาม 2 คำถามข้างต้น จึงกลายมาเป็นปัญหาที่ไม่เฉพาะนักคณิตศาสตร์เท่านั้นที่ให้ความสนใจศึกษา แต่นักวิทยาศาสตร์ในอีกหลายสาขา นักวิศวกรรมศาสตร์ รวมทั้งนักเศรษฐศาสตร์ ก็ให้ความสนใจในการที่จะนำทฤษฎีต่าง ๆ ที่ได้เหล่านั้นไปประยุกต์เพื่อสร้างงานและต่อยอดงานวิจัยในเชิงประยุกต์ ตลอดจนการพัฒนาเทคโนโลยีที่ทันสมัยต่าง ๆ ในทางวิทยาศาสตร์เพื่อแก้ปัญหาและพัฒนาประเทศ ดังนั้น การศึกษาและการวิจัยในสาขาทฤษฎีบทจุดตรึงจึงเป็นที่สนใจในวงกว้างต่อนักวิชาการ จนทำให้มีนักวิจัยและนักวิชาการตลอดจนผู้เชี่ยวชาญที่ทำการการศึกษา และทำการวิจัยในสาขานี้เกิดขึ้นมาอย่างต่อเนื่อง

ต้นกำเนิดของทฤษฎีบทจุดตรึงเกิดขึ้นย้อนหลังไปเมื่อ ศตวรรษที่ 19 มีการศึกษาการมีจริง (existence) และความเป็นได้อย่างเดียว (uniqueness) ของผลเฉลยโดยนักคณิตศาสตร์หลายท่าน อาทิเช่น Cauchy, Liouville, Lipschitz, Peano, Fredholm และ Picard ซึ่งต่อมาได้มีการพัฒนาองค์ความรู้พื้นฐานนี้ต่อไปอีก โดยนักคณิตศาสตร์กันอย่างแพร่หลาย ซึ่งสามารถจำแนกปัญหาที่น่าสนใจเกี่ยวกับทฤษฎีบท

จุดตรึงออกได้เป็น 2 ปัญหา คือ การมีจริงของจุดตรึงของการส่งและการประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง นั้น เรานิยามเซตของจุดตรึงของการส่ง T (fixed point set of T) โดย $\text{Fix}(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ เมื่อ C ไม่เป็นเซตว่าง และ T เป็นการส่งจาก C ไปยัง C ทฤษฎีบทสำคัญและมีชื่อเสียงที่ตอบปัญหา การมีจริงของจุดตรึงของการส่ง มีดังต่อไปนี้ หลักการส่งหดตัวของบานาค (Banach Contraction Mapping Principle) ทฤษฎีบทจุดตรึงของบราวเวอร์ (Brouwer's Fixed Point Theorem) ทฤษฎีบทจุดตรึงของชาวเดอร์ (Schauder's Fixed Point Theorem) ทฤษฎีบทของบราวเดอร์-โกท (Browder-Gohde Theorem) และทฤษฎีบทของเคิร์ค (Kirk's Theorem) โดยผลที่ได้ของทฤษฎีบทเหล่านี้ให้ความจริงที่สำคัญ คือ การส่งมีจุดตรึง ในกรณีของการส่งที่เป็นการส่งที่ไม่ขยาย (nonexpansive mapping) นั้น ปัญหาการมีจริงของจุดตรึงของการส่ง เป็นปัญหาที่นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจกันอย่างมาก โดยนักคณิตศาสตร์กลุ่มหนึ่งก็พยายามกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ ลงบนปริภูมิ เพื่อให้ได้ว่า "ทุก ๆ เซตปิดคอนเวกซ์ที่มีขอบเขต (closed convex bounded set) $C \subseteq X$ และทุก ๆ การส่งที่ไม่ขยาย $T : C \rightarrow C$ มีจุดตรึง" ในปี 1965 นักคณิตศาสตร์ที่ชื่อ Felix Browder ได้พิสูจน์ว่า ถ้า C เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ที่มีขอบเขตของปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) H และ T เป็นการส่งไม่ขยาย จาก C ไปยัง C แล้ว T มีจุดตรึงใน C ยิ่งไปกว่านั้น ยังให้ผลที่เป็นจริงนี้ด้วยสำหรับปริภูมิ บานาคคอนเวกซ์เอกรูป (uniformly convex Banach space) และในปีเดียวกัน W. A. Kirk ได้พิสูจน์ว่า ถ้า X ที่เป็ปริภูมิบานาคสะท้อน (reflexive Banach space) และ C เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ ของ X ซึ่งมีสมบัติโครงสร้างปกติ (normal structure) และให้ T เป็น การส่งที่ไม่ขยายจาก C ไปยัง C แล้ว T มีจุดตรึงใน C

สำหรับการประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง โดยการสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบต่าง ๆ นั้น จากทฤษฎีบทหลักการส่งหดตัวของบานาค ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่เป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวาง และมีประโยชน์มากมาย ในระยะแรกที่คิดค้น โดยนักคณิตศาสตร์ชื่อดังชาวโปแลนด์ คือ Stefam Banach พบว่า สามารถใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบง่าย ๆ ที่เรียกว่า ระเบียบวิธีทำซ้ำปีการ์ (Picard iteration) ในการประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง นั่นคือ ให้ $x_0 \in X$ นิยาม $x_{n+1} = Tx_n$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$ จะได้ $x_n = T^n x_0$ สำหรับทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ ในกรณีที่ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งที่ไม่ขยายเรามักตัวอย่างง่าย ๆ ว่าระเบียบวิธีทำซ้ำปีการ์ไม่ลู่อัด ตัวอย่างเช่น ให้ $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ กำหนดโดย $Tx = 1 - x$ สำหรับทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า T เป็นการส่งที่ไม่ขยาย (ตรวจสอบได้ง่าย ๆ โดยนิยาม 1.1 ในหัวข้อต่อไป) และมีจุดตรึง

คือ และถ้าเราเลือก $x_0 = \frac{1}{3}$ พบว่า ลำดับของปีการ์ (Picard sequence) คือ $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots)$ ซึ่งก็หมายความว่า $(T^n x_0)$

ไม่ลู่อัด ดังนั้น จึงมีนักคณิตศาสตร์กลุ่มใหญ่ได้พยายามสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบต่าง ๆ มากมายที่สามารถตอบคำถามที่เกี่ยวกับการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งได้กว้างกว่าระเบียบวิธีทำซ้ำปีการ์ เพื่อใช้ในการประมาณค่าจุดตรึงของการส่งที่ไม่เฉพาะเป็นการส่งที่ไม่ขยายแต่เป็นการส่งที่กว้างขวางมากขึ้น เช่น การส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ (asymptotically nonexpansive mapping) Mann (1953) ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับประมาณค่าจุดตรึงของการส่งในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยเรียกกระบวนการนี้ว่า "Mann Iteration Process" ต่อมา Ishikawa (1974) ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่สำหรับ

ประมาณค่าจุดตรึงของการส่งในปริภูมิบานาค โดยเรียกกระบวนการนี้ว่า "Ishikawa Iteration Process" ซึ่งระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับประมาณค่าจุดตรึงทั้งสองนี้มีชื่อเสียงอย่างมาก และได้ถูกนำไปศึกษาและประยุกต์ใช้งานกันอย่างแพร่หลาย

การมีจริงของจุดตรึงของการส่งที่ไม่ขยาย และการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ

ในหัวข้อนี้ เราจะให้บทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการมีจริงของจุดตรึงของการส่งทั้งที่เป็นการส่งที่ไม่ขยายและการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ โดยเราจะเริ่มด้วยบทนิยามของการส่งที่ไม่ขยายดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 ให้ X เป็นปริภูมิโนร์ม (norm space) C และเป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่าง ของ X การส่ง $T : C \rightarrow C$ จะเรียกว่าการส่งที่ไม่ขยาย (nonexpansive mapping) ถ้า $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ สำหรับทุก ๆ x, y ที่เป็สมาชิกของ C

บทนิยาม 1.2 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ (complete metric space) และ $T : X \rightarrow X$ จะกล่าวว่า T เป็น การส่งแบบลิปชิตซ์ (Lipschitzian mapping) ถ้ามี $k \geq 0$ ซึ่ง $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ และจะเรียกค่าคงตัว ที่น้อยที่สุดว่าค่าคงตัวลิปชิตซ์ (Lipschitz constant)

ข้อสังเกต 1 ถ้า $k > 1$ แล้วการส่ง T จะเรียกว่าเป็น การส่งแบบหดตัว (contraction mapping) ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่มีชื่อเสียงอย่างมาก โดยให้ความจริงที่สำคัญ คือการส่ง T มีจุดตรึง

ทฤษฎีบท 1.3 (หลักการส่งหดตัวของบานาค) ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกบริบูรณ์ และ $T : X \rightarrow X$ เป็นการส่งแบบหดตัว แล้ว T จะมีจุดตรึงเพียงจุดเดียวเท่านั้น และสำหรับ $x \in X$ จะได้ว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n x = x_0 \text{ และ } d(T^n x, x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, Tx) \text{ เมื่อ } k \in (0, 1) \text{ ซึ่ง } d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \text{ สำหรับทุก ๆ } x, y \in X$$

ทฤษฎีบท 1.4 (ทฤษฎีบทจุดตรึงของบราวเวอร์) ถ้า C เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์กะทัดรัด (convex compact subset) ที่ไม่ใช่เซตว่างของ $\mathbb{R}^n$ และ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งต่อเนื่อง (continuous mapping) แล้ว T มีจุดตรึงใน C

ทฤษฎีบท 1.5 (ทฤษฎีบทจุดตรึงของชาวเดอร์) ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคจริง (real Banach space) และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ที่มีขอบเขตและไม่เป็นเซตว่างของ X ให้ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งกะทัดรัดแล้ว T มีจุดตรึงใน C

Browder (1965) ได้พิสูจน์ว่า ถ้า C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ที่มีขอบเขต ของปริภูมิฮิลเบิร์ต X และ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งที่ไม่ขยาย แล้ว T จะมีจุดตรึงใน C ยิ่งไปกว่านั้นยังแสดงผลที่ได้นี้เป็นจริงด้วย เมื่อ X เป็นปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูปและในปีเดียวกัน Kirk ได้แสดงว่า ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคสะท้อน และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ ที่มีขอบเขต ของ X ซึ่งมีสมบัติโครงสร้างปกติ และให้ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งที่ไม่ขยาย แล้ว T มีจุดตรึงใน C ดังทฤษฎีบทที่ 1.6 และ 1.7

ทฤษฎีบท 1.6 (ทฤษฎีบทบราวเดอร์-โกท) ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป และ $C \subseteq X$ เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ ที่มีขอบเขต ให้ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งที่ไม่ขยาย แล้ว T มีจุดตรึงใน C

ทฤษฎีบท 1.7 (ทฤษฎีบทของเคอร์ค) ถ้า X ที่เป็นปริภูมิบานาค สะท้อน และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ ของ X ซึ่งมีโครงสร้างปรกติ และให้ T เป็นการส่งที่ไม่ขยายจาก C ไปยัง C แล้ว T มีจุดตรึงใน C

สำหรับการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับนั้น เป็นการส่งที่เป็น การวางนัยทั่วไปของการส่งที่ไม่ขยาย ซึ่งนิยามได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.8 ให้ X เป็นปริภูมิโนร์ม และ C เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็น เซตว่างของ X การส่ง $T : C \rightarrow C$ จะถูกเรียกว่า การส่งที่ไม่ขยาย แบบเชิงเส้นกำกับ (asymptotically nonexpansive mapping) ถ้ามี ลำดับ $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $k_n \rightarrow 1$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ซึ่งทำให้ $\|T^n x - T^n y\| \leq k_n \|x - y\|$ สำหรับทุก ๆ x, y ที่เป็นสมาชิกของ C และทุก ๆ $n \geq 1$

บทนิยาม 1.9 การส่ง T จะถูกเรียกว่าเป็น การส่งเอกรูปด้วยค่า คงตัวลิปชิตซ์ L (uniformly L -Lipschitzian) ถ้ามีค่าคงตัว ที่เป็น บวก ซึ่งทำให้ $\|T^n x - T^n y\| \leq L \|x - y\|$ สำหรับทุก ๆ x, y ที่เป็นสมาชิก ของ C และทุก ๆ $n \geq 1$

ข้อสังเกต 2 เราพบว่าถ้า $K^n = 1$ แล้วการส่ง T จะเป็นการส่งที่ไม่ขยาย ซึ่งก็หมายความว่า การส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับเป็น การส่งที่กว้างขึ้นกว่าการส่งที่ไม่ขยาย และเรายังพบความจริงอีกว่า ถ้าการส่ง T เป็นการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ T แล้วการส่ง จะเป็นการส่งเอกรูปด้วยค่าคงตัวลิปชิตซ์ L เมื่อ $L = \sup \{k_n : n \geq 1\}$ อีกด้วย

Goebel และ Kirk (1972) ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่ให้ความจริง สำหรับการมีจริงของจุดตรึงของการส่งที่เป็นการส่งที่ไม่ขยายแบบ เชิงเส้นกำกับที่สำคัญ คือ

ทฤษฎีบท 1.10 ถ้า C เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ที่มีขอบเขตและ ไม่ใช่เซตว่างของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป X และ T เป็นการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับจาก C ไปยัง C แล้ว T มีจุดตรึงใน C

หลังจากการพยายามตอบปัญหาการมีจริงของจุดตรึงของการส่ง ทั้งที่เป็นการส่งที่ไม่ขยาย และการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ โดยนิยาม และทฤษฎีบทที่ได้ในหัวข้อที่ 1. นั้น ก็มาถึงปัญหาที่ 2. คือ จะสามารถหาจุดตรึงของการส่งนั้นได้อย่างไร นั่นก็คือ เป็นการ สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ สำหรับประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง ซึ่งจะ กล่าวในหัวข้อต่อไป

การประมาณค่าวิธีทำซ้ำของจุดตรึงของการส่งที่ไม่ขยายและ การส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ

การประมาณค่าวิธีทำซ้ำของจุดตรึงของการส่ง ก็คือ การสร้าง ระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง โดยได้ให้เงื่อนไข ที่พอเพียง สำหรับการลู่เข้าแบบอ่อน (weak convergence) และ แบบเข้ม (strong convergence) ของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้น สำหรับการส่งที่ไม่ขยายนั้น ระเบียบวิธีทำซ้ำที่มีชื่อเสียง และได้ถูกนำมาศึกษา โดยนักคณิตศาสตร์และถูกนำมาประยุกต์ใช้งานกันอย่างแพร่หลาย ได้แก่ ระเบียบวิธีทำซ้ำที่เรียกว่า "Mann iteration process" ซึ่งสร้าง ขึ้นโดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ Mann (1953) และ "Ishikawa iteration process" ซึ่งสร้างขึ้นโดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ Ishikawa (1974) โดย ระเบียบวิธีทำซ้ำของ Mann สำหรับประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง T คือ สำหรับ $n \geq 1$ ให้

$$x_1 \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1 - \alpha_n) x_n \quad (1)$$

เมื่อลำดับ $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ ซึ่งต่อมา Ishikawa ได้ให้เงื่อนไขที่ พอเพียงสำหรับการลู่เข้าแบบเข้มไปยังจุดตรึงของการส่ง T ดัง ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า C เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์กระชับ ของปริภูมิบานาค X และ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งที่ไม่ขยาย และลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (1) เมื่อกำหนดให้ลำดับ $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \alpha_n < 1$ แล้ว $\{x_n\}$ ลำดับ ลู่เข้าแบบเข้มไป ยังจุดตรึงของการส่ง T

ยิ่งไปกว่านั้น Ishikawa ยังได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่ที่เป็น การขยายระเบียบวิธีทำซ้ำของ Mann สำหรับประมาณค่าจุดตรึงของ การส่ง T ดังต่อไปนี้ คือ สำหรับ $n \geq 1$ ให้

$$x_1 \in C, \quad \begin{aligned} y_n &= \beta_n T x_n + (1 - \beta_n) x_n \\ x_{n+1} &= \alpha_n T y_n + (1 - \alpha_n) x_n, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2)$$

เมื่อกำหนดให้ลำดับ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0, 1]$ ซึ่งเราเรียกระเบียบวิธี ทำซ้ำนี้ว่า Ishikawa iteration process และต่อมา Reich (1979) ได้ ให้เงื่อนไขที่พอเพียงสำหรับการลู่เข้าแบบอ่อนไปยังจุดตรึงของการส่ง T ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้า C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ ที่ไม่ใช่เซตว่างของ ปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป X ภายใต้โนร์มที่หาอนุพันธ์ได้เฟรเช (Fréchet differentiable) และ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งที่ไม่ขยาย แล้ว ลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (1) ลู่เข้าแบบอ่อนไปยังจุดตรึงของการส่ง T เมื่อกำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty$

สำหรับระเบียบวิธีทำซ้ำ (2) Tan และ Xu (1993) ได้พิสูจน์ ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบอ่อนไปยังจุดตรึงของการส่ง T ภายใต้เงื่อนไข ที่พอเพียงบางอย่าง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้า C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ ที่ไม่ใช่เซตว่างของ ปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป X ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขของโอเปียล (Opial's condition) หรือภายใต้โนร์มที่หาอนุพันธ์ได้เฟรเช และ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งที่ไม่ขยาย แล้ว ลำดับ $\{x_n\}$ นิยาม โดย (2) ลู่เข้าแบบอ่อนไปยังจุดตรึงของการส่ง T เมื่อกำหนดให้ ลำดับ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไข $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \alpha_n) = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (1 - \beta_n) < \infty$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \beta_n < 1$

ซึ่งต่อมา Takahashi และ Kim (1998) ได้พิสูจน์การลู่เข้าแบบ อ่อนไปยังจุดตรึงของการส่ง T ภายใต้เงื่อนไขที่พอเพียงบางอย่าง ที่แตกต่างจาก ทฤษฎีบท 2.3 ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้า X ปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป ซึ่งสอดคล้อง เงื่อนไขของโอเปียล หรือภายใต้โนร์มที่หาอนุพันธ์ได้เฟรเช และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ ที่ไม่ใช่เซตว่างของ X และ $T : C \rightarrow C$ เป็นการส่งที่ไม่ขยายที่มีจุดตรึงแล้ว ลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (2) ลู่เข้าแบบอ่อน ไปยังจุดตรึงของการส่ง T เมื่อกำหนดให้ ลำดับ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไข หรือ $\alpha_n \in [a, 1], \beta_n \in [a, b]$ สำหรับบางค่า a, b ซึ่ง $0 < a \leq b < 1$

สำหรับในกรณีของการส่งที่เป็นการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ นั้น Schu (1991) ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำที่เรียกว่า "The Modified Mann Iteration Method" และ "The Modified Ishikawa Iteration Method" สำหรับประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง T เมื่อ C เป็น เซตย่อย คอนเวกซ์ ที่ไม่ใช่เซตว่างของปริภูมิบานาค X และ $T : C \rightarrow C$

เมื่อกำหนดให้ ลำดับ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ เป็นสมาชิกของ $[0,1]$ โดยนิยามได้ดังต่อไปนี้ สำหรับ $x_1 \in C$, และ $n \geq 1$

The Modified Mann Iteration Method:

$$x_{n+1} = \alpha_n T^n x_n + (1 - \alpha_n) x_n \quad (3)$$

The Modified Ishikawa Iteration Method:

$$\begin{aligned} y_n &= b_n T^n x_n + (1 - b_n) x_n, \\ x_{n+1} &= \alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n) x_n \end{aligned} \quad (4)$$

นอกจากนี้ Schu ยังได้ให้เงื่อนไขที่พอเพียงสำหรับการลู่เข้าแบบเข้มน้อยจุดตรึงของการส่ง T ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.5 สำหรับปริภูมิฮิลเบิร์ต H ถ้า C เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์ ที่มีขอบเขตและไม่ใช่เซตว่างของ H และให้ $T: C \rightarrow C$ เป็นการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับและต่อเนื่องแบบบริบูรณ์

ซึ่งลำดับ $\{k_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไข $k_n \geq 1$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} (k_n^2 - 1) < \infty$ กำหนดให้ ลำดับ $\{\alpha_n\}$ อยู่ใน $[0,1]$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $\varepsilon \leq \alpha_n \leq 1 - \varepsilon$ สำหรับบางค่าของ $\varepsilon > 0$ และทุกค่าของ $n \geq 1$ แล้วลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (3) ลู่เข้าแบบเข้มน้อยจุดตรึงของการส่ง T

Rhoades (1994) ยังได้แสดงผลที่ได้เป็นจริง สำหรับระเบียบวิธีทำซ้ำ (4) และสำหรับ X ที่เป็นปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูปอีกด้วย ซึ่งต่อมา Osilike และ Aniagbosor (2000) ได้พิสูจน์ว่าสำหรับปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป X ที่สอดคล้องเงื่อนไขของโอเปียล ลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (4) ลู่เข้าแบบเข้มน้อยจุดตรึงของการส่ง T Glowinski และ Tallec Le (1989) ได้แสดงว่า ระเบียบวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนให้ผลเชิงตัวเลขดีกว่าระเบียบวิธีทำซ้ำสองขั้นตอนและหนึ่งขั้นตอน โดย Glowinski และ Tallec Le ได้ใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนในการประมาณค่าผลเฉลยของปัญหา elastoviscoplasticity problem, liquid crystal theory และการคำนวณค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue computation) ดังนั้น จึงมีนักคณิตศาสตร์กลุ่มหนึ่งได้พยายามสร้าง และศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำสามขั้นตอนสำหรับประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง

Xu และ Aslam Noor (2002) ได้สร้างและศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำสามขั้นตอน ดังต่อไปนี้ สำหรับ $n \geq 1$ ให้ลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ คือ

$$\begin{aligned} z_n &= a_n T^n x_n + (1 - a_n) x_n \\ y_n &= b_n T^n z_n + (1 - b_n) x_n, \\ x_{n+1} &= \alpha_n T^n y_n + (1 - \alpha_n) x_n, \end{aligned} \quad (5)$$

และได้พิสูจน์ว่าภายใต้เงื่อนไขที่พอเพียงบางอย่าง ลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ นิยามโดย (5) ลู่เข้าแบบเข้มน้อยจุดตรึงของการส่ง และเรียกระเบียบวิธีทำซ้ำนี้ว่า “Noor Iteration Method” ซึ่งต่อมา ศ.ดร.สุเทพ สวนใต้ (Suantai, 2005) ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสาม ขั้นตอนแบบใหม่ขึ้น ซึ่งเป็นการขยายและปรับปรุง ระเบียบวิธีทำซ้ำที่นิยามโดย (5) โดยเรียกระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นใหม่นี้ว่า “The Modified Noor Iteration Method” และนิยามได้ดังต่อไปนี้ สำหรับ $n \geq 1$

$$\begin{aligned} z_n &= a_n T^n x_n + (1 - a_n) x_n \\ y_n &= b_n T^n z_n + c_n T^n x_n + (1 - b_n - c_n) x_n, \\ x_{n+1} &= \alpha_n T^n y_n + \beta_n T^n z_n + (1 - \alpha_n - \beta_n) x_n, \end{aligned} \quad (6)$$

และได้พิสูจน์ว่า ภายใต้เงื่อนไขที่พอเพียงบางอย่าง ลำดับ

$\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ นิยามโดย (6) ลู่เข้าแบบเข้มน้อยจุดตรึงของการส่ง T นอกจากนั้นยังได้พิสูจน์อีกว่า สำหรับปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป X ที่สอดคล้องเงื่อนไขของโอเปียล ลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย (6) ลู่เข้าแบบเข้มน้อยจุดตรึงของการส่ง T

จากที่ผ่านมาเป็นการศึกษาการส่ง T ที่เป็นการส่งไปยังเซตเดียวกัน ซึ่งเราเรียกการส่งในลักษณะนี้ว่า เป็นการส่งในตัวเอง (self-mapping) ต่อไปลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $T: [0,1] \rightarrow \square$ (เมื่อ $\square$ เป็นเซตของจำนวนจริง) นิยาม โดย $Tx = 2x^2$ ถ้าเราให้ $x_1 = 1$ แล้วเราพบว่า $x_2 = 2$ ไม่เป็นสมาชิกของ $C = [0,1]$ ซึ่งก็หมายความว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ไม่นิยาม นั่นคือ ลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย $x_{n+1} = Tx_n$ ไม่เป็นสมาชิกของ C

จากตัวอย่าง เราเรียกการส่ง T ในลักษณะนี้ว่า การส่งนอกตัวเอง (nonself-mapping) ดังนั้น ตัวดำเนินการ การฉาย (projection operator) จะเข้ามามีบทบาทในการส่ง Tx_n ให้เป็นสมาชิกของ C มีนักคณิตศาสตร์ที่สนใจปัญหานี้ และได้ทำการศึกษา และพบความจริงว่า สำหรับปริภูมิฮิลเบิร์ตจริง (real Hilbert space) H และการฉายเมตริก (metric projection) $P_C: H \rightarrow C$ ลำดับ $\{x_n\}$ นิยามโดย $x_{n+1} = P_C Tx_n$ เป็นสมาชิกของ C ยิ่งไปกว่านั้น ยังพบว่า P_C มีสมบัติที่สวยงาม คือ เป็นการส่งที่ไม่ขยาย นั่นคือ $\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\|$ สำหรับทุก $x, y \in H$ แต่เป็นที่น่าเสียดายว่า สมบัตินี้ไม่จริงบนปริภูมิบานาคทั่วไป (general Banach space) ดังนั้นการศึกษานบน ปริภูมิบานาคทั่วไปจึงต้องอาศัยความจริง ดังต่อไปนี้ คือ เซตย่อย C ของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป X จะถูกเรียกว่าเป็นเซตที่หด (retract) ถ้ามีการส่งต่อเนื่อง $P: X \rightarrow C$ ซึ่งทำให้ $Px = x$ สำหรับทุก $x \in C$ และความจริงที่ว่าทุก ๆ เซตย่อยปิด คอนเวกซ์ ของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูปเป็นเซตที่หด และถ้า $P^2 = P$ แล้ว เราเรียกการส่ง $P: X \rightarrow X$ ว่าเป็นการหด (retraction)

สำหรับการส่งที่ไม่ขยายแบบนอกตัวเอง (nonexpansive nonself-mapping) นั้น Jung และ Kim (1998) ได้พิสูจน์โดยให้ความจริงที่สำคัญสำหรับการมีจริงของจุดตรึงของการส่งที่ไม่ขยายแบบนอกตัวเองในปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป ภายใต้เงื่อนไข $\text{uniformly } G\hat{d}$ teaux differentiable และในปีเดียวกัน Takahashi และ Kim (1998) ได้ให้เงื่อนไขที่พอเพียง สำหรับการลู่เข้าแบบเข้มน้อยจุดตรึงของการส่งที่ไม่ขยายแบบนอกตัวเองในปริภูมิบานาคสะท้อน ภายใต้เงื่อนไข $\text{uniformly } G\hat{d}$ teaux differentiable

สำหรับในกรณีที่การส่ง T เป็นการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับแบบนอกตัวเอง (asymptotically nonexpansive nonself-mapping) Chidume และคณะ (2003) ได้ให้นิยามของการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับแบบนอกตัวเอง ดังต่อไปนี้

บทนิยาม การส่ง $T: C \rightarrow X$ จะถูกเรียกว่าเป็น การส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ ถ้ามีลำดับ $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $k_n \rightarrow 1$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ซึ่งทำให้ $\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq k_n \|x - y\|$ สำหรับทุก x, y ที่เป็นสมาชิกของ C และทุก $n \geq 1$ และการส่ง T จะเรียกว่า เป็นการส่งเอกรูปด้วยค่าคงตัวลิปซิทซ์ L ถ้ามีค่า คงตัว ที่เป็นบวก L ซึ่งทำให้

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq L \|x - y\|$$

สำหรับทุก x, y ที่เป็นสมาชิกของ C และทุก $n \geq 1$

โดย Chidume และคณะ (2003) ได้สร้าง และศึกษาระเบียบวิธี

ทำซ้ำ ซึ่งนิยามโดย $x_{n+1} = P(\alpha_n T (PT)^{n-1} x_n + (1 - \alpha_n) x_n)$, เมื่อ $n \geq 1$ และลำดับ $\{\alpha_n\} \subseteq (0, 1)$ และได้พิสูจน์ว่าภายใต้เงื่อนไขที่พอเพียงบางอย่างลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งนิยามโดย $x_{n+1} = P(\alpha_n T (PT)^{n-1} x_n + (1 - \alpha_n) x_n)$ ลู่เข้าแบบเข้มไปยังจุดตรึงของการส่ง T นอกจากนี้ ยังได้พิสูจน์ว่า สำหรับ ปริภูมิบานาคคอนเวกซ์เอกรูป X ภายใต้เงื่อนไขที่หาอนุพันธ์ได้ เฟรเชลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย $x_{n+1} = P(\alpha_n T (PT)^{n-1} x_n + (1 - \alpha_n) x_n)$ ลู่เข้าแบบอ่อนไปยังจุดตรึงของการส่ง T

บทสรุป

การศึกษาการมีจริงของจุดตรึงของการส่งทั้งที่เป็นการส่งที่ไม่ขยาย และการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ ก็คือ การพยายามกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ ลงบนปริภูมิ เพื่อให้ได้ความจริงที่สำคัญว่าการส่งนั้นมีจุดตรึง และเมื่อจุดตรึงของการส่งมีจริงแล้ว การประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง ก็คือ การสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับประมาณค่าจุดตรึงของการส่ง โดยให้เงื่อนไขที่พอเพียงบางอย่างสำหรับการลู่เข้าแบบอ่อน และแบบเข้ม ไปยังจุดตรึงของการส่งนั้น นอกจากการศึกษาการมีจริงของจุดตรึงของการส่ง และการสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ สำหรับประมาณค่าจุดตรึงของการส่งทั้งที่เป็นการส่งที่ไม่ขยาย และการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับที่ผู้เขียนได้กล่าวไว้ในบทความนี้ ยังมีนักคณิตศาสตร์อีกเป็นจำนวนมาก ที่ได้สร้างและศึกษาระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบใหม่ ๆ เพื่อประมาณค่าจุดตรึง และจุดตรึงร่วม (common fixed point) ของการส่ง ทั้งที่เป็นการส่งที่ไม่ขยาย และการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ ทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ต และในปริภูมิบานาค ทฤษฎีบทการลู่เข้าอย่างอ่อน และอย่างเข้มของแต่ละการทำซ้ำได้ถูกสร้างขึ้น มีการศึกษาเงื่อนไขที่พอเพียงสำหรับทฤษฎีบทการลู่เข้าอย่างอ่อนและอย่างเข้มเหล่านั้น รวมไปถึงการสร้าง และศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำทั้งแบบชัดแจ้ง (explicit) และแบบแฝง (implicit) หลายขั้นตอน สำหรับวงศ์จำกัด (finite family) ของการส่งที่ไม่ขยายและการส่งที่ไม่ขยายแบบเชิงเส้นกำกับ และพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าอย่างอ่อน และอย่างเข้มของระเบียบวิธีการทำซ้ำที่สร้างขึ้นไปยังจุดตรึง และจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของการส่งเหล่านั้น ภายใต้เงื่อนไขที่พอเพียงบางอย่าง ยิ่งไปกว่านั้น นักคณิตศาสตร์อีกเป็นจำนวนมากยังได้นำนิยามทฤษฎีบท และองค์ความรู้ที่ได้จากการศึกษาการมีจริงของจุดตรึงของการส่งและการประมาณค่าวิธีทำซ้ำของจุดตรึงของการส่งไปประยุกต์ใช้สำหรับการหาคำตอบของสมการที่สำคัญ ๆ ในสาขาต่าง ๆ เช่น นำไปประยุกต์ใช้เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหาในเรื่องของสมการตัวดำเนินการไม่เชิงเส้น (nonlinear operator equations) ในเรื่องของแก๊ปัญหาอสมการแปรผัน (variational inequality problem (VIP)) การแก้สมการหาคำตอบของปัญหาสมดุล (equilibrium problems (EP)) ปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (optimizations problems) และปัญหาน้อยที่สุด (minimizations problems) ทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ตและปริภูมิบานาค ซึ่งเป็นปัญหาที่สำคัญและมีประโยชน์อย่างมากในสาขาวิชาทางด้านฟิสิกส์ คณิตศาสตร์ประยุกต์ วิศวกรรม และสาขาทางด้านเศรษฐศาสตร์ซึ่งกล่าวได้ว่างานวิจัยทางสาขานี้ เป็นงานวิจัยที่น่าสนใจเป็นอย่างยิ่ง โดยผลที่ได้จากการศึกษา และการทำวิจัยทางด้านนี้จะ เป็นประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความรู้เชิงวิชาการ และมีประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์พื้นฐาน (basic science) และวิทยาศาสตร์เชิงประยุกต์ (apply science) อันถือเป็น

พื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนาประเทศชาติ ต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- Browder, F. E. (1965). Fixed point theorems for noncompact mappings in hilbert space. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 53, 1272–1276.
- Chidume, C. E., Ofoedu, E. U., & Zogeye, H. (2003). Strong and weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 280, 364–374.
- Goebel, K., & Kirk, W. A. (1972). A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings. *Proceedings of America Mathematical Society*, 35, 171–174.
- Glowinski, R., & Tallec Le, P. (1989). *Augmented lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics*. Philadelphia: SIAM.
- Ishikawa, S. (1974). Fixed point by a new iteration. *Proceedings of America Mathematical Society*, 44, 147–150.
- Jung, J. S., & Kim, S. S. (1998). Strong convergence theorems for nonexpansive nonself-mappings in banach spaces. *Non-Linear Analysis*, 33, 321–329.
- Mann, W. R. (1953). Mean value methods in iteration. *Proceedings of America Mathematical Society*, 4, 506–510.
- Reich, S. (1979). Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 67, 274–276.
- Rhoades, B. E. (1994). Fixed point iterations for certain non-linear mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 183, 118–120.
- Schu, J. (1991). Iterative construction of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 158, 407–413.
- Suantai, S. (2005). Weak and strong convergence criteria of Noor iterations for asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 311, 506–517.
- Tan, K. K., & Xu, H. K. (1993). Approximating fixed points

of nonexpansive mapping by the ishikawa iteration process. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 17, 8301–8308.

Takahashi, W., & Kim, G. E. (1998). Approximating Fixed points of nonexpansive mappings in banach space. *Mathematical Japonica*, 48, 1–9.

Xu, B. L., & Aslam Noor, M. (2002). Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in banach spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 267, 444–453.