การเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวนแบบใช้พารามิเตอร์และแบบไม่ใช้พารามิเตอร์

ดวงพร หัชชะวณิช

A Comparison of Type I Error and Power of Parametric Statistics and Nonparametric Statistics for Homogeneity of Variance Test

Doungporn Hatchavanich

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย กรุงเทพ 10400
Faculty of Science and Technology, University of the Thai Chamber of Commerce, Bangkok, 10400
Corresponding author. E-mail address: doungporn_hat@utcc.ac.th
Received: 17 March 2017; Accepted: 7 June 2017

บทคัดย่อ

ในการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับความเป็นเอกพันธ์ของค่าความแปรปรวนมีสถิติทดสอบหลายตัวที่สามารถเลือกใช้ได้ จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าไม่มีสถิติทดสอบตัวใดใช้ได้ผลดีที่สุดในทุก ๆ กรณี โดยสถิติทดสอบมีทั้งกรณีที่ใช้พารามิเตอร์ (Bartlett's test, Levene's test และ O'Brien's test) และไม่ใช้พารามิเตอร์ (Gini's test และ ANOMV) แต่อย่างไรก็ตามสถิติทดสอบเหล่านี้ก็อาจจะมีจุดอ่อนบางประการ ในปัจจุบันนี้ยังไม่มีการศึกษาเกี่ยวกับการใช้สถิติทดสอบเหล่านี้เมื่อมีการฝ่าฝืนข้อตกลงเบื้องต้นที่แตกต่างกัน ดังนั้นการศึกษานี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นของการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 และอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบที่ใช้พารามิเตอร์และไม่ใช้พารามิเตอร์ โดยศึกษาจากข้อมูลที่ได้จากการจำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลเพื่อให้ได้ ประชากร 4 ชุด และ 5 ชุด ที่มีการแจกแจงปกติ การแจกแจงปกติแบบผสม การแจกแจงเอกรูป การแจกแจงที การแจกแจงไคกำลังสอง การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง โดยกำหนดให้มีขนาดตัวอย่างเท่ากัน (6, 16, 30, 60) และมีสัดส่วนของความแปรปรวนของประชากร 4 ชุดและ 5 ชุด เท่ากับ 1:1:2:2, 1:2:3:4, 1:1:1:4 และ 1:1:2:2:4, 1:2:3:4:5, 1:1:4:4:4 ตามลำดับ

จากการศึกษาพบว่าในกรณีประชากรมีการแจกแจงปกติ การที่ใช้ขนาดตัวอย่างน้อยจะไม่ค่อยมีผลกระทบกับค่าสถิติทดสอบเหล่านี้ และเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าประมาณอำนาจการทดสอบจากสถิติทดสอบจะใกล้เคียงกัน การกำหนดสัดส่วนความแปรปรวนของประชากรที่แตกต่างกันไม่มีผลกระทบต่อค่าประมาณอำนาจการทดสอบ สถิติทดสอบ Levene, Bartlett2 และ O'Brien มีความแกร่งมากที่สุด แต่เมื่อพิจารณาจากความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 และอำนาจการทดสอบ พบว่าเมื่อประชากรมีการแจกแจงปกติ สถิติทดสอบ Gini และ Bartlett1 ให้ผลดีที่สุด เมื่อประชากรมีการแจกแจงในรูปแบบอื่น สถิติทดสอบ Levene ให้ผลดีที่สุด นอกจากนี้ยังพบว่าเมื่อประชากรมีการแจกแจงไคกำลังสอง และการแจกแจงปกติแบบผสม สถิติทดสอบ Bartlett2 และ Levene ให้ผลดีที่สุด เมื่อประชากรมีการแจกแจงเอกรูป และการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง สถิติทดสอบ Jackknife และ Levene ให้ผลดีที่สุด

คำสำคัญ: สถิติทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของค่าความแปรปรวน สถิติทดสอบที่ใช้พารามิเตอร์ สถิติทดสอบที่ไม่ใช้พารามิเตอร์

Abstract

There are a good number of tests that are available for testing a hypothesis that samples come from populations with the homogeneity of variance. Many studies reported that there is no test which is uniformly best for all distributions and sample size configurations. It can be seen that parametric tests: Bartlett's test, Levene's test and O'Brien's test and nonparametric tests: Gini's test and ANOMV offer different methods for researchers to test data, each test has some unique weak points. To date, there are no studies about these tests when assumptions are violated under different situations. The aim of this paper is to compare the empirical probability of the Type I error and the power of the parametric and nonparametric tests from the Monte Carlo Simulation under 4 and 5 populations by the different types of distributions: normal, a mixture of Gaussian, uniform, student's t, chi-square, exponential distribution and 4 configurations of group equal sample size (6, 16, 30, 60), the group variances were set as follows the ratio of 1:1:2:2, 1:2:3:4, 1:1:1:4 and 1:1:2:2:4, 1:2:3:4:5, 1:1:4:4:4. It was found that for normal, a small sample size had a small effect on the performance of the tests, however when the size increased, the tests performed almost equivalently. Changing the ratio of population variance also seemed to have no effect. Levene, Bartlett2 and O'Brien outperformed the others in term of robustness. Considering the type I errors and the power of tests, the findings showed that the Gini's and Bartlett1's test were best, when the data is normally distributed and Levene's for the others. Moreover, for Chi-square and a mixture of Gaussian distribution, Bartlett2's and Levene's were the best. For uniform and exponential distributions, Jackknife's test and Levene's test were the best.

Keywords: homogeneity of variance tests, parametric tests, nonparametric tests

บทนำ

สถิติทดสอบหลาย ๆ ตัวมักจะมีข้อกำหนดที่จะต้องทดสอบสมมติฐานว่าตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีค่าความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่ (Conover, Johnson, & Johnson, 1981; Underwood, 1997) เช่น ในการทดสอบสมมติฐานเพื่อทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยของประชากรหลายกลุ่มด้วยวิธีวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) นั้นมีข้อสมมติเบื้องต้นที่จำเป็นต้องตรวจสอบ 3 ประการได้แก่ ข้อมูลต้องสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ มีค่าความแปรปรวนของประชากรไม่แตกต่างกัน และค่าความคลาดเคลื่อนเป็นอิสระกัน หากข้อสมมติเหล่านี้ไม่เป็นจริงจะทำให้ได้ข้อสรุปที่ผิดพลาดได้ ซึ่งมีวิธีการทางสถิติหลายวิธีที่สามารถใช้ในการทดสอบสมมติฐานว่าตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีค่าความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่ เช่น Bartlett (1937); Cochran (1941); Levene (1960) Brown, M. B. และ Forsythe, A. B. (1974) เป็นต้น (Lim & Loh, 1996; Zhang, 1998)

จากงานวิจัยของ Box (1953) พบว่าสถิติทดสอบ Bartlett เป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ในการทดสอบสมมติฐานว่าตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีค่าความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่ โดยมีข้อจำกัดว่าตัวอย่างต้องสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ โดยวิธีนี้ให้ค่าสถิติที่มีความไวหากประชากรไม่ได้แจกแจงปกติ ถึงกระนั้นก็มีผู้ที่นำสถิติทดสอบ Bartlett ไปใช้อย่างกว้างขวางแม้ว่าตัวอย่างจะไม่ได้ถูกสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ Levene (1960) ได้เสนอสถิติทดสอบซึ่งใช้ทดสอบสมมติฐานว่าตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวนหรือไม่ โดยใช้การแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปค่าความแตกต่างระหว่างค่าของข้อมูลกับค่าเฉลี่ยของตัวอย่างที่ถูกสุ่มมาจากประชากรแต่ละชุด ต่อมา Neuhauser (2007) ได้เสนอว่าค่าสถิติทดสอบนี้มีความแกร่งเมื่อข้อมูลไม่ได้ถูกสุ่มมาจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ และให้อำนาจการทดสอบสูง สถิติทดสอบ Levene จึงเป็นที่นิยมใช้มากขึ้นในทางสถิติและในการประยุกต์ใช้ในด้านอื่น ๆ นอกจากนี้ Lim and Loh (1996) ได้ศึกษาเปรียบเทียบการทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวนโดยใช้ข้อมูลจากการจำลองให้มีตัวอย่างขนาดเล็กถึงขนาดปานกลาง จากการเปรียบเทียบความแกร่งและอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ Levene กับ Bartlett ในกรณีที่มีการปรับค่าความโด่งและไม่ได้ปรับค่าความโด่ง สถิติทดสอบ Box-Andersen และ Jackknife ซึ่งประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ Bootstrap และไม่ใช้ Bootstrap พบว่าสถิติทดสอบ Levene ซึ่งประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธี Bootstrap ให้อำนาจการทดสอบมากที่สุด เนื่องจากในการศึกษานี้ได้จากการจำลองข้อมูลประชากร 4 ชุด โดยกำหนดให้มีค่าความแปรปรวน (1,6,11,16), (16,11,6,1),(1,1,1,16) และกำหนดขนาดตัวอย่าง (n_1, n_2, n_3, n_4) = (5,5,5,5), (5,5,10,10), (10,10,10,10), (5,10,15,20), (5,5,20,20),(20,20,20,20) จากประชากรที่มีการแจกแจงสมมาตรและไม่สมมาตร ดังนั้นหากจะนำข้อสรุปไปใช้จำเป็นต้องระมัดระวัง ซึ่งหากเป็นกรณีที่จำนวนประชากรมากกว่า 4 กลุ่ม อาจได้ข้อสรุปที่แตกต่างไปจากนี้

จากงานวิจัยของ Hatchavanich (2014b) ได้เปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบที่ใช้ทดสอบความเท่ากันของค่าความแปรปรวน 8 สถิติทดสอบ ได้แก่ (1) Levene (2) Modified Levene (3) Bartlett (4) Box-Andersen (5) Jackknife (6) Z-variance (7) Overall-Woodward modified Z-variance (8) O'Brien ในกรณีที่ข้อมูลมีการแจกแจงที่เป็นไปตามข้อสมมติและไม่เป็นไปตามข้อสมมติ โดยกำหนดให้ประชากรมีสัดส่วนของค่าความแปรปรวนของประชากร 4 ชุด และ 5 ชุด แตกต่างกัน ซึ่งผล

การศึกษาพบว่าในกรณีที่ประชากรไม่ได้มีการแจกแจงปกติ สถิติทดสอบที่ใช้พารามิเตอร์ Levene Jackknife Bartlett2 และ O'Brien สามารถใช้ในการทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวนได้ โดยในกรณีที่ใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากันสถิติทดสอบเหล่านี้จะให้อำนาจการทดสอบมากกว่ากรณีที่ใช้ขนาดตัวอย่างแตกต่างกัน ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างน้อยกว่า 30 และประชากรมีการแจกแจงเอกรูป สถิติทดสอบ Levene และ Jackknife มีอำนาจการทดสอบสูง แต่ในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงที่มีความเบ้ต่ำ สถิติทดสอบ Bartlett 2 และ O'Brien มีอำนาจการทดสอบในระดับปานกลาง นอกจากนี้ Hatchavanich (2014b) พบว่า สถิติทดสอบ O'Brien ใช้ได้ดีที่สุดเมื่อประชากรมีการแจกแจงไคกำลังสอง เมื่อประชากรมีการแจกแจงที่เบ้เล็กน้อยและมีความแปรปรวนของประชากรแตกต่างกันมาก ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างแตกต่างกันและมีขนาดเล็ก สถิติทดสอบ Bartlett1 และO'Brien ยังคงให้อำนาจการทดสอบสูง

ในการศึกษานี้จึงต้องการเปรียบเทียบค่าประมาณความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 และค่าประมาณอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบที่ใช้ในการทดสอบการเท่ากันของความแปรปรวน แบบใช้พารามิเตอร์ (Levene Jackknife Bartlett2 และ O'Brien) และแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ (Gini และANOMV)

วิธีการศึกษาและวัสดุอุปกรณ์

ในการศึกษาได้ใช้ข้อมูลที่ได้จากการจำลอง (simulation) โดยใช้โปรแกรม R โดยมีการกำหนดเงื่อนไขต่าง ๆ ดังนี้

1) กำหนดให้ประชากรมีการแจกแจงดังนี้ (1) การแจกแจงปกติ (2) การแจกแจงที (การแจกแจงที่สมมาตรการแจกแจงที่มีหางยาว (long-tailed) (3) การแจกแจงที่มีความโด่งต่ำ (low kurtosis) (4) การแจกแจงปกติแบบผสม (สมมาตรและheavy-tailed) (5) การแจกแจงเอกรูป (สมมาตร และ very low kurtosis) (6) การแจกแจงไคกำลังสอง (เบ้ long-tailed และ high kurtosis) และ (7) การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง (เบ้ heavy-tailed และ high kurtosis)

2) กำหนดให้ประชากรมีสัดส่วนของค่าความแปรปรวน ดังนี้

กรณีที่มีประชากร 4 ชุด $\sigma_1^2:\sigma_2^2:\sigma_3^2:\sigma_4^2 = 1:1:2:2,\ 1:2:3:4,\ 1:1:1:4$

กรณีที่มีประชากร 5 ชุด $\sigma_1^2:\sigma_2^2:\sigma_3^2:\sigma_4^2:\sigma_5^2 = 1:1:2:2:4,\ 1:2:3:4:5, 1:\ 1:4:4:4$

3) กำหนดให้มีขนาดตัวอย่างมีจำนวนเท่ากันดังนี้

กรณีที่มีประชากร 4 ชุด (6,6,6,6), (16,16,16,16), (30,30,30,30) และ (60,60,60,60)

กรณีที่มีประชากร 5 ชุด (6,6,6,6,6), (16,16,16,16,16), (30,30,30,30,30) และ (60,60,60,60,60)

4) ในการทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวน ใช้สถิติทดสอบดังนี้

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_k^2$$

$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_{i'}^2$ อย่างน้อย 1 คู่ เมื่อ $i \neq i'$ $(i\ ,\ i' = 1,2,\ldots,k)$

โดยมีสถิติทดสอบที่สนใจศึกษา ได้แก่ สถิติทดสอบ Levene, Bartlett1 (B_1), Bartlett2 (B_2), Jackknife, O′Brien, ANOMV (Analysis of Mean test for Variance) และ สถิติทดสอบ Gini ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1) สถิติทดสอบ Levene

ให้ n = จำนวนข้อมูลทั้งหมด n_i = ขนาดตัวอย่างของกลุ่ม i $Z_{ij} = (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$ โดย

$\bar{X}_i$ = ค่าเฉลี่ยของกลุ่ม i $\bar{Z}_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}}{n_i}$, $\bar{Z} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{Z}_i}{n}$, k = จำนวนกลุ่มประชากร

สถิติทดสอบ $L_{SQ} = \dfrac{(n-k)\sum_{i=1}^{k} n_i (\bar{Z}_i - \bar{Z})^2}{(k-1)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_j}(Z_{ij} - \bar{Z}_i)^2}$ มีลักษณะการแจกแจงใกล้เคียงกับการแจกแจงเอฟ ซึ่งมีองศาเสรีเท่ากับ k-1 และ n-k

2) สถิติทดสอบ Bartlett

ให้ i แทน จำนวนกลุ่มตัวอย่าง $C = 1 + \left\{\left[\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)^{-1}\right] - (N-k)^{-1}\right\} / \{3(k-1)\}$

$$M = (N-k)\log\left\{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)s_i^2 / (N-k)^{-1}\right\} - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\log s_i^2$$

จะได้สถิติทดสอบ $B_1 = \dfrac{M}{C}$ มีการแจกแจงไคกำลังสอง โดยจะปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า B_1 มีค่ามากกว่า $\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ นอกจากนี้ยังพบว่า B_2 ซึ่งคำนวณได้จาก $B_2 = dB_1$ โดย $d = 2/(\hat{\beta}_2 - 1)$; $\hat{\beta}_2 = \dfrac{N\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^4}{\left\{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2\right\}^2}$

มีค่าวิกฤตของ B_2 เหมือนกับ B_1 เนื่องจาก $B_1 \to \dfrac{1}{2}(\beta_2 - 1)\chi^2_{k-1}$ โดย $\beta_2 = E(X-\mu)^4/\sigma^4$ เป็นค่าความโด่ง (Box, 1953)

3) สถิติทดสอบ Jackknife

ให้ $\bar{x}_{i(j)} = \dfrac{\sum_{i \neq j} x_{ij}}{(n_i - 1)}$, $s^2_{i(j)} = \dfrac{\sum_{i \neq j}\left(x_{ij} - \bar{x}_{i(j)}\right)^2}{(n_i - 2)}$, $\mu_{ij} = n_i \log s_i^2 - (n_i - 1)s^2_{i(j)}$, $\bar{\mu}_{i.} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n_i}\mu_{ij}}{n_i}$

และ $\bar{\mu}_{..} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\mu_{ij}}{N}$ สำหรับ $j = 1,2,3,\ldots,n_i$ $i = 1,2,3,\ldots,k$

สถิติทดสอบ $J_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(\bar{\mu}_{i.} - \bar{\mu}_{..}\right)^2 / (k-1)}{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\mu_{ij} - \bar{\mu}_{i.}\right)^2 / (N-I)}$ ซึ่งสามารถประมาณได้ด้วยการแจกแจงเอฟ โดยจะปฏิเสธ H_0 ถ้า J_1 มีค่ามากกว่า $F_{(1-\alpha)}(k-1, N-k)$

4) สถิติทดสอบ O′Brien

ให้ Y_{ij} เป็นค่าของข้อมูลดิบ โดย $\bar{Y}_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}}{n_i}$ เป็นค่าเฉลี่ยของข้อมูลในกลุ่มที่ i $S_i^2 = \dfrac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}\right)^2}{n_i - 1}$ สามารถคำนวณค่าสถิติทดสอบได้ดังนี้ $V_{ij} = \dfrac{(n_i - 1.5)n_i\left(Y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2 - 0.5S_i^2(n_i - 1)}{(n_i - 1)(n_i - 2)}$ ค่าเฉลี่ยของ V ในแต่ละกลุ่มคำนวณได้จาก $\bar{V}_i = \dfrac{\sum V_{ij}}{n_i} = S_i^2$ และจากการนำค่า V_{ij} ไปคำนวณค่าสถิติทดสอบ F โดยวิธีเดียวกับการวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) ทำให้ได้ค่าสถิติทดสอบ O′Brien ซึ่ง O′Brien (1981) ได้อ้างว่าสถิติทดสอบนี้สามารถใช้ได้ดีกับข้อมูลด้านพฤติกรรม (behavioral science data) และมีความแกร่งหากข้อมูลไม่ได้มีการแจกแจงปกติ

5) สถิติทดสอบ ANOMV (Analysis of Mean test for Variance)

Wludyka and Nelson (1997) ได้เสนอสถิติทดสอบ ANOMV ซึ่งใช้หลักเกณฑ์ของการวิเคราะห์ค่าเฉลี่ย (Analysis of Means Test: ANOM) ในการทดสอบความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวนของประชากรที่มีการแจกแจงปกติ โดยการคำนวณค่าความแปรปรวนของตัวอย่างกลุ่มที่ i ; i=1,2,...,k และค่าเฉลี่ยของความแปรปรวน k กลุ่ม ($\bar{s}^2$) โดย $s_i^2 = \dfrac{\sum_{i=1,j=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2}{n_i - 1}$ เมื่อ $\bar{x}_i$ คือค่าเฉลี่ยของตัวอย่างกลุ่มที่ i และ $\bar{s}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} s_i^2}{k}$ โดยจะปฏิเสธสมมติฐานหลักเมื่อค่าสถิติทดสอบ s_i^2 อย่างน้อย 1 ค่า อยู่นอกขอบเขตบน ($UDL = U_{\alpha,k,\nu}\, k\bar{s}^2$) และขอบเขตล่าง ($LDL = L_{\alpha,k,\nu}\, k\bar{s}^2$) จากตารางของ Wludyka and Nelson (1997) ที่องศาอิสระ k กับ $\nu = n_i - 1$ เนื่องจากมีข้อจำกัดของค่าขอบเขตวิกฤตจึงไม่สามารถใช้สถิติทดสอบ AMOMV ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างน้อยกว่า 4 หรือมากกว่า 35 ได้

6) สถิติทดสอบ Gini

Bhat, Badade, and Aruna Rao (2002) ได้เสนอสถิติทดสอบซึ่งคำนวณจากค่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของจีนี่ (Gini's mean difference: T_i) โดยการเรียงข้อมูลจากมากไปน้อย สำหรับแต่ละกลุ่มที่ i โดย i = 1 , 2, ...,k

$T_i = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\left(n_i(n_i - 1)\right)}\sum_{j,l}^{n_i}\left(x_{i(j)} - x_{i(l)}\right)$ เมื่อ $x_{i(j)}$ คือค่าสังเกตกลุ่มที่ i ลำดับที่ j $x_{i(l)}$ คือค่าสังเกตกลุ่มที่ i ลำดับที่ l n_i คือขนาดตัวอย่างกลุ่มที่ i โดย j < l

ค่าสถิติทดสอบจีนี่ $GT = \frac{T_g}{T_w}\left(\frac{2E(T_w)}{\sum_{i=1}^{k} D_i\left(1-\left(\frac{n_i}{N}\right)\right)}\right)$ โดย $T_w = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i T_i\right)$, $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$

$$T_g = \sum_{i=1}^{k} n_i \ln T_w - \sum_{i=1}^{k} n_i \ln T_i \quad D_i = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\pi(n_i+1)}{3} + 2\sqrt{3}(n_i-2) - 2(2n_i-3)\right)$$

และ $E(T_w) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \sigma_i}{N}$, $Var(T_w) = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i D_i \sigma_i^2}{N^2}$ เมื่อ σ_i^2 เป็นความแปรปรวนของประชากรกลุ่มที่ i

$$E(T_g) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} D_i\left(1-\frac{n_i}{N}\right) \quad Var(T_g) = \frac{1}{2N^2}\left(N^2\sum_{i=1}^{k} D_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{k} n_i D_i\right)^2 - 2N\sum_{i=1}^{k} n_i D_i^2\right)$$

GT มีการแจกแจง F_{ρ_1,ρ_2} โดย $\rho_1 = \frac{2(E(T_g))^2}{Var(T_g)}$, $\rho_1 = \frac{2(E(T_w))^2}{Var(T_w)}$ ซึ่งจะปฏิเสธสมมติฐานหลักที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 หาก GT มีค่ามากกว่า F_{α,ρ_1,ρ_2}

5) ใช้ค่านอนเซนทรัลลิตี้ พารามิเตอร์ (Noncentrality Parameter: ϕ) ในการบ่งชี้ความแตกต่างของความแปรปรวน (Games, Winkler, & Probert, 1972) โดยคำนวณได้ดังนี้

$$\phi = \left[\frac{\sum(\sigma_i^2 - \bar{\sigma}^2)/k}{\sigma_1^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

โดย k คือจำนวนกลุ่มประชากร σ_i^2 คือความแปรปรวนของประชากรกลุ่มที่ i σ_1^2 คือความแปรปรวนของประชากรกลุ่มที่มีค่าน้อยที่สุด $\bar{\sigma}^2$ คือค่าเฉลี่ยของความแปรปรวนของประชากร k กลุ่ม

ได้กำหนดช่วงของ ϕ ที่ระบุความแตกต่างของประชากรออกเป็น 3 ระดับดังนี้ (1) $0<\phi<1.5$ อธิบายได้ว่าความแปรปรวนของประชากรมีความแตกต่างกันน้อย (2) $1.5\le\phi<3$ อธิบายได้ว่าความแปรปรวนของประชากรมีความแตกต่างกันปานกลาง (3) $\phi\ge 3.0$ อธิบายได้ว่าความแปรปรวนของประชากรมีความแตกต่างกันมาก ในการศึกษาได้กำหนดค่าความแปรปรวนของประชากรให้มีความแตกต่างกันน้อย ($0<\phi<1.5$)

ตารางที่ 1 ค่านอนเซนทรัลลิตี้พารามิเตอร์ แสดงความแตกต่างของความแปรปรวนที่คำนวณได้จากประชากรทุกชุด

ความแปรปรวนของประชากร					$\bar{\sigma}^2$	$\phi = \left[\frac{\sum(\sigma_i^2 - \bar{\sigma}^2)/k}{\sigma_1^2}\right]^{\frac{1}{2}}$
ชุดที่ 1	**ชุดที่ 2**	**ชุดที่ 3**	**ชุดที่ 4**	**ชุดที่5**		
1	1	2	2	-	1.5	0.500
1	2	3	4	-	2.5	1.118
1	1	1	4	-	1.75	1.299
1	1	2	2	4	2	1.095
1	2	3	4	5	3	1.414
1	1	4	4	4	2.8	1.469

6) วัดประสิทธิภาพของสถิติทดสอบโดยพิจารณาจากค่าประมาณความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 (ร้อยละของจำนวนครั้งที่ปฏิเสธ H_0 จากผลการทดสอบสมมติฐาน เมื่อ H_0 เป็นจริง) และค่าประมาณอำนาจการทดสอบ (ร้อยละของจำนวนครั้งที่ปฏิเสธ H_0 จากผลการทดสอบสมมติฐาน เมื่อ H_0 ไม่จริง) จากการทำซ้ำ 10,000 ครั้ง โดยสถิติทดสอบที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดคือสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมการเกิดความคลาดเคลื่อนประเภทที่ 1 ให้มีค่าไม่เกินช่วงที่กำหนด และมีอำนาจการทดสอบมากที่สุด

ผลการศึกษา

ในการสรุปผลการทดสอบว่าสถิติทดสอบใดจะสามารถควบคุมความน่าจะเป็นของการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้ จะใช้เกณฑ์ของ Cochran (1954) โดยกำหนดระดับนัยสำคัญ 0.05 ซึ่งหากค่าประมาณความน่าจะเป็นของการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 จากการทดลองมีค่า 0.0375-0.0625 จะสรุปว่าค่าสถิติทดสอบนั้นสามารถควบคุมความน่าจะเป็นที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้ หรืออาจกล่าวได้ว่าสถิติทดสอบมีความแกร่ง จากนั้นจึงเปรียบเทียบค่าประมาณอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้โดยสถิติทดสอบที่มีประสิทธิภาพมากที่สุดจะให้ค่าประมาณอำนาจการทดสอบมากที่สุด

ตารางที่ 2 ค่าประมาณความน่าจะเป็นการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่1 ของสถิติทดสอบ Levene Bartlett1 Bartlett2 Jackknife O′Brien ANOMV และ Gini เมื่อประชากร 4 ชุด มีการแจกแจงปกติ ปกติแบบผสม ที ไคกำลังสอง (มีความโด่งต่ำและมีความโด่งสูง) เอกรูป และแบบเลขชี้กำลัง

การแจกแจง	ขนาดตัวอย่าง	สถิติทดสอบ						
		Levene	Bartlett 1	Bartlett 2	Jackknife	O′Brien	ANOMV	Gini
ปกติ	6	0.0633	0.0492	0.0515	0.1673	0.0315	0.0419	0.0545
	16	0.0509	0.0502	0.0483	0.0873	0.0382	0.0434	0.0517
	30	0.0509	0.0508	0.0500	0.0704	0.0451	0.0454	0.0521
	60	0.0483	0.0491	0.0468	0.0550	0.0455	-	0.0486
ปกติแบบผสม	6	0.0559	0.1511	0.0459	0.2499	0.0263	0.1309	0.1350
	16	0.0362	0.2713	0.0306	0.1345	0.0278	0.1940	0.1813
	30	0.0368	0.3548	0.0276	0.1153	0.0325	0.2234	0.2114
	60	0.0348	0.4179	0.0276	0.0961	0.0327	-	0.2347
ที	6	0.0581	0.1935	0.0445	0.2809	0.0272	0.1497	0.1794
	16	0.0409	0.3322	0.0346	0.1522	0.0296	0.2053	0.2631
	30	0.0420	0.4013	0.0369	0.1250	0.0366	0.2243	0.2975
	60	0.0388	0.4769	0.0315	0.0976	0.0364	-	0.3270
ไคกำลังสองโด่งต่ำ	6	0.0827	0.1105	0.0619	0.2284	0.0459	0.0967	0.1032
	16	0.0622	0.1568	0.0570	0.1241	0.0499	0.1234	0.1233
	30	0.0513	0.1865	0.0505	0.0915	0.0466	0.1389	0.1299
	60	0.0479	0.1881	0.0475	0.0754	0.0446	-	0.1283
ไคกำลังสองโด่งสูง	6	0.1209	0.3364	0.1099	0.3845	0.0717	0.2357	0.3151
	16	0.0700	0.4565	0.0710	0.1677	0.0569	0.2738	0.3880
	30	0.0525	0.4964	0.0554	0.1223	0.0469	0.2730	0.4136
	60	0.0434	0.5318	0.0438	0.0932	0.0411	-	0.4293
เอกรูป	6	0.0641	0.0104	0.0633	0.1098	0.0334	0.0120	0.0172
	16	0.0504	0.0023	0.0498	0.0461	0.0403	0.0026	0.0030
	30	0.0460	0.0005	0.0443	0.0401	0.0414	0.0015	0.0011
	60	0.0491	0.0000	0.0457	0.0422	0.0450	-	0.0000

ตารางที่ 2 (ต่อ)

การแจกแจง	ขนาดตัวอย่าง	สถิติทดสอบ Levene	Bartlett 1	Bartlett 2	Jackknife	O′Brien	ANOMV	Gini
แบบเลขชี้กำลัง	6	0.1208	0.3334	0.1160	0.3761	0.0725	0.2338	0.3179
	16	0.0656	0.4480	0.0691	0.1700	0.0519	0.2701	0.3876
	30	0.0535	0.5059	0.0544	0.1289	0.0475	0.2772	0.4204
	60	0.0477	0.5378	0.0471	0.1002	0.0443	-	0.4348

หมายเหตุ ช่องที่ระบายทึบคือกรณีที่มีค่าประมาณความน่าจะเป็นของการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ระหว่าง 0.0375-0.0625 (ระดับนัยสำคัญ 0.05)

ตารางที่ 3 ค่าประมาณความน่าจะเป็นของการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ของสถิติทดสอบ Levene Bartlett1 Bartlett2 Jackknife O′Brien ANOMV และ Gini เมื่อประชากร 5 ชุด มีการแจกแจงปกติ ที ไคกำลังสองโด่งต่ำ การแจกแจงไคกำลังสองโด่งสูง ปกติแบบผสม เอกรูป และแบบเลขชี้กำลัง

การแจกแจง	ขนาดตัวอย่าง	Levene	Bartlett 1	Bartlett 2	Jackknife	O′Brien	ANOMV	Gini
ปกติ	6	0.0706	0.0521	0.0503	0.2016	0.0344	0.0487	0.0623
	16	0.0544	0.0494	0.0457	0.0873	0.0422	0.0450	0.0517
	30	0.0512	0.0504	0.0480	0.0704	0.0444	0.0466	0.0518
	60	0.0516	0.0526	0.0498	0.0597	0.0483	-	0.0506
ปกติแบบผสม	6	0.0627	0.1840	0.0394	0.2970	0.0295	0.1647	0.1593
	16	0.0412	0.3224	0.0254	0.1592	0.0316	0.2329	0.2217
	30	0.0375	0.4109	0.0216	0.1211	0.0302	0.2637	0.2472
	60	0.0378	0.4822	0.0253	0.1003	0.0346	-	0.2707
ที	6	0.0649	0.2291	0.0419	0.3301	0.0309	0.1780	0.2099
	16	0.0433	0.3831	0.0335	0.1717	0.0329	0.2380	0.3018
	30	0.0430	0.4704	0.0292	0.1321	0.0350	0.2619	0.3468
	60	0.0375	0.5392	0.0273	0.1088	0.0354	-	0.3691
ไคกำลังสองโด่งต่ำ	6	0.0964	0.1154	0.0528	0.2594	0.0508	0.1018	0.1009
	16	0.0633	0.1744	0.0530	0.1303	0.0477	0.1337	0.1290
	30	0.0541	0.2075	0.0467	0.1000	0.0476	0.1610	0.1432
	60	0.0540	0.2230	0.0495	0.0779	0.0503	-	0.1504
ไคกำลังสองโด่งสูง	6	0.1248	0.3886	0.1032	0.4371	0.0737	0.2529	0.3652
	16	0.0746	0.5365	0.0676	0.1938	0.0583	0.3005	0.4616
	30	0.0525	0.5795	0.0503	0.1298	0.0454	0.3097	0.4861
	60	0.0482	0.6060	0.0455	0.1012	0.0453	-	0.4992
เอกรูป	6	0.0710	0.0101	0.0690	0.1266	0.0346	0.0110	0.0145
	16	0.0525	0.0011	0.0526	0.0493	0.0394	0.0022	0.0019
	30	0.0514	0.0004	0.0507	0.0444	0.0451	0.0010	0.0006
	60	0.0491	0.0002	0.0493	0.0469	0.0466	-	0.0001
แบบเลขชี้กำลัง	6	0.1221	0.3964	0.1083	0.4455	0.0748	0.2547	0.3705
	16	0.0740	0.5416	0.0677	0.1953	0.0588	0.3028	0.4681
	30	0.0541	0.5854	0.0511	0.1371	0.0474	0.3126	0.4879
	60	0.0470	0.6159	0.0439	0.0958	0.0451	-	0.5041

หมายเหตุ ช่องที่ระบายทึบคือกรณีที่มีค่าประมาณความน่าจะเป็นของการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ระหว่าง 0.0375-0.0625 (ระดับนัยสำคัญ 0.05)

ตารางที่ 4 สถิติทดสอบที่สามารถควบคุมการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 และให้อำนาจการทดสอบเรียงลำดับจากมากไปหาน้อย ในกรณีประชากร 4 ชุด โดย ① เป็นสถิติทดสอบที่มีอำนาจการทดสอบมากที่สุด ② เป็นสถิติทดสอบที่มีอำนาจการทดสอบมากในลำดับที่รองลงมา โดยการเปรียบเทียบในแต่ละขนาดตัวอย่าง

	ปกติ				ปกติแบบผสม				ไคกำลังสอง				เอกรูป				แบบเลขชี้กำลัง			
ขนาดตัวอย่าง	6	16	30	60	6	16	30	60	6	16	30	60	6	16	30	60	6	16	30	60
$\sigma_1^2:\sigma_2^2:\sigma_3^2:\sigma_4^2=1:1:2:2$, $\phi=0.5$																				
Levene		③	③	⑤*	①	①	②	②			②	②		②	②*	②*			②	②
Bartlett 1	②	①	①	①*																
Bartlett 2	④	④	④	④*	②	①	①	①		①	①	①	①	③	③*	③*			①	①
Jackknife				③*										①	①*	①*				
O'Brien	⑤	⑤	⑤	⑥*	③	②	③	③		②	③	③		④	④*	④*			③	③
Gini	①	②	②	②*												⑤*				
ANOMV	③	⑥	⑥																	
$\sigma_1^2:\sigma_2^2:\sigma_3^2:\sigma_4^2=1:2:3:4$, $\phi=1.118$																				
Levene			④*	④*	①	②	②	②*			②	②*		③*	③*	①*			②	②
Bartlett 1	②	②	②*	①*									①	⑤	⑤	①*				
Bartlett 2		③	③*	③*	②	①	①*	①*			①	①*		②*	②*	①*			①	①
Jackknife				②*										①*	①*	①*				
O'Brien				⑤*	③	③	③	③*		①	③	③*		④	④	①*			③	③
Gini	①	①	①*	①*										⑥	⑥	①*				
ANOMV	③															⑦				
$\sigma_1^2:\sigma_2^2:\sigma_3^2:\sigma_4^2=1:1:1:4$, $\phi=1.299$																				
Levene		③	③*	①*	①	①	①	①*			①*	①*		②*	②*	①*			①	①*
Bartlett 1	①	①*	①*	①*										⑤*	⑤*	①*				
Bartlett 2	⑤	⑤	⑤*	①*	③	③	③	③*		②	③*	②*	①	④*	④*	①*			③	③
Jackknife				①*										①*	①*	①*				
O'Brien	④	④	④*	①*	②	②	②	②*	①	①	②*	③*		③*	③*	①*			②	②*
Gini	②	②	②*	①*										⑥*	⑥*	①*				
ANOMV	③	⑥	⑥	①*										⑦	⑦					

*เป็นสถิติทดสอบที่มีค่าประมาณอำนาจการทดสอบมากกว่า 0.8

ตารางที่ 5 สถิติทดสอบที่สามารถควบคุมการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 และให้อำนาจการทดสอบเรียงลำดับจากมากไปหาน้อย โดย ① เป็นสถิติทดสอบที่มีอำนาจการทดสอบมากที่สุด ② เป็นสถิติทดสอบที่มีอำนาจการทดสอบมากในลำดับที่รองลงมา ในกรณีประชากร 5 ชุดโดยการเปรียบเทียบแต่ละขนาดตัวอย่าง

	ปกติ				ปกติแบบผสม				ไคกำลังสอง				เอกรูป				แบบเลขชี้กำลัง			
ขนาดตัวอย่าง	6	16	30	60	6	16	30	60	6	16	30	60	6	16	30	60	6	16	30	60
$\sigma_1^2:\sigma_2^2:\sigma_3^2:\sigma_4^2:\sigma_5^2 = 1:1:2:2:4$ $\phi = 1.095$																				
Levene		③	③	①*	①	①	①	①*				①*		②	①*	①*			①	①
Bartlett 1	①	①	①	①*																
Bartlett 2	③	⑤	④	①*	③	③	③	③*		①	①	③*	①	③	①*	①*			②	②
Jackknife				①*										①	①*	①*				
O'Brien		④	⑤	①*	②	②	②	②*		②	②	②*			①*	①*			③	③
Gini		②	②	①*																
ANOMV	②	⑥	⑥																	
$\sigma_1^2:\sigma_2^2:\sigma_3^2:\sigma_4^2:\sigma_5^2 = 1:2:3:4:5$ $\phi = 1.414$																				
Levene		④	④*	①*	①	②	②	①*				①*		③*	③*	①*			②	②
Bartlett 1	②	②	②*	①*									①	⑤	⑥	①*				
Bartlett 2	④	③	③*	①*	②	①	①*	①*			①*	①*		②*	②*	①*			①	①
Jackknife				①*										①*	①*	①*				
O'Brien	⑤	⑤	⑤	①*	③	③	③	①*		①	②*	①*		④*	④	①*			③	③
Gini	①	①	①*	①*										⑥	⑤	①*				
ANOMV	③		⑥													⑦				
$\sigma_1^2:\sigma_2^2:\sigma_3^2:\sigma_4^2:\sigma_5^2 = 1:1:4:4:4$ $\phi = 1.469$																				
Levene		④	③*	①*	①	②	②	②*				①*		③*	①*	①*			②	②*
Bartlett 1	②	②	①*	①*										⑤*	①*	①*				
Bartlett 2	③	③	④*	①*	②	①	①*	①*			①*	①*	①	②*	①*	①*			①	①*
Jackknife				①*										①*	①*	①*				
O'Brien	⑤	⑤	⑤*	①*	③	③	③	③*	①	①	②*	①*		④*	①*	①*			③	③*
Gini	①	①*	②*	①*																
ANOMV	④	⑥	⑥	①*																

*เป็นสถิติทดสอบที่มีค่าประมาณอำนาจการทดสอบมากกว่า 0.8

อภิปรายผลการศึกษา

จากการศึกษาพบว่า เมื่อประชากรมีการแจกแจงปกติ สถิติทดสอบแบบใช้พารามิเตอร์ที่มีความแกร่งได้แก่ Levene Bartlett1 Bartlett2 O'Brien และสถิติทดสอบแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ที่มีความแกร่งได้แก่ ANOMV และ Gini จากการเปรียบเทียบค่าประมาณอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบที่มีความแกร่ง พบว่า Gini ซึ่งเป็นสถิติทดสอบแบบไม่ใช้พารามิเตอร์ แต่มีอำนาจการทดสอบมากใกล้เคียงกับ Bartlett1 ซึ่งเป็นสถิติทดสอบแบบใช้พารามิเตอร์ เมื่อประชากรมีการแจกแจงปกติแบบผสม ทีไคกำลังสอง เอกรูป และ เลขชี้กำลัง สถิติทดสอบ Levene ซึ่งเป็นสถิติทดสอบแบบใช้พารามิเตอร์ยังคงมีความแกร่งในทุกการแจกแจง ซึ่งสอดคล้องกับการศึกษาของ Neuhauser (2007) ในขณะที่ สถิติทดสอบ ANOMV และ Gini ไม่มีความแกร่ง จากการเปรียบเทียบค่าประมาณของอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบที่มีความแกร่งพบว่าในกรณีประชากรมีการแจกแจงปกติแบบ

ผสม ไคกำลังสอง และแบบเลขชี้กำลัง และข้อมูลมีการกระจายน้อย (ϕ = 0.5, 1.118) สถิติทดสอบ Bartlett2 มีอำนาจการทดสอบมากที่สุด แต่เมื่อประชากรมีการกระจายมากขึ้น (ϕ=1.299) สถิติทดสอบ Levene มีอำนาจการทดสอบมากที่สุด

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

ในการทดสอบสมมติฐานว่าตัวอย่างสุ่มมาจากประชากรที่มีค่าความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่นั้น มีสถิติทดสอบหลายวิธีที่นักวิจัยสามารถเลือกใช้ได้ ซึ่งเป็นสถิติทดสอบที่ใช้พารามิเตอร์และไม่ใช้พารามิเตอร์ จากการศึกษาโดยใช้ข้อมูลประชากรที่ได้จำลองขึ้น 4 และ 5 ชุด โดยกำหนดให้ความแปรปรวนของประชากรให้มีความแตกต่างกันน้อย ($0<\phi<1.5$) ได้ผลการศึกษาที่อาจใช้เป็นแนวทางสำหรับเลือกสถิติทดสอบในกรณีที่ประชากรมีคุณลักษณะสอดคล้องกับที่กำหนดในงานวิจัยนี้ ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า ไม่มีสถิติทดสอบใดที่ดีที่สุดในทุก ๆ กรณี ดังนั้นในการเลือกใช้สถิติทดสอบควรจะต้องตรวจสอบรูปแบบการแจกแจงของประชากรก่อน แล้วจึงเลือกสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมการเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้ และให้อำนาจการทดสอบมากที่สุด ในกรณีประชากรมีการแจกแจงปกติ สถิติทดสอบ Gini ซึ่งไม่ใช้พารามิเตอร์แต่ให้อำนาจการทดสอบที่มากใกล้เคียงกับสถิติทดสอบ Bartlett1 ซึ่งเป็นสถิติทดสอบที่ใช้พารามิเตอร์ ในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงไคกำลังสอง สถิติทดสอบ Bartlett2 ให้อำนาจการทดสอบมากที่สุด ในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงเอกรูป สถิติทดสอบ Jackknife ให้อำนาจการทดสอบมากที่สุด ในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง สถิติทดสอบ Bartlett2 และสถิติทดสอบ Levene ให้อำนาจการทดสอบมากกว่า สถิติทดสอบ O’Brien

ในการศึกษาครั้งต่อไป ควรมีการศึกษาเปรียบเทียบประสิทธิภาพของสถิติทดสอบเกี่ยวกับความเป็นเอกพันธ์ของค่าความแปรปรวน ในกรณีที่ประชากรมีการแจกแจงในรูปแบบต่าง ๆ โดยความแปรปรวนของประชากรแตกต่างกันในระดับปานกลาง ($1.5\leq\phi<3$) และระดับมาก ($\phi>3$) เพื่อได้ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์และสามารถนำไปใช้ได้อย่างกว้างขวางในงานด้านการแพทย์ วิศวกรรม และด้านการเกษตร ต่อไป

เอกสารอ้างอิง

Bartlett, M.S. (1937) Properties of Sufficiency and Statistical Test. *Proceedings of the Royal Society: Series A*, 160, 268-282.

Box, G. E. P. (1953). Non-normality and tests on variances. *Biometrika*, *40*, 318-335.

Bhat, B. R., Badade, M. N., & Aruna Rao, K. (2002). A New test for Equality of Variances for k Normal Populations. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, *31*(4), 567-587.

Brown, M.B. and Forsythe, A.B. (1974) *Robust tests for equality of variances, J. Amer. Statist. Assoc.*, 69, 364-367.

Cochran, W. G. (1954). The combination of estimates from different experiments. *Biometrics*, *10*(1), 101-129.

Conover, W. J., Johnson, M. E., & Johnson, M. M. (1981). A comparative study of tests for homogeneity of variances, with applications to the outer continental shelf bidding data. *Technometrics*, *23*(4), 351-361.

Games, P. A., Winkler, H. B., & Probert, D. A. (1972). Robust tests for homogeneity of variance. *Educational and Psychological Measurement*, *32*(4), 887-909.

Hatchavanich, D. (2014a). A comparison of type I error and power of Bartlett’s test, Levene’s test and O’Brien’s test for homogeneity of variance tests. *Southeast-Asian J. of Sciences*, *3*, 181-194.

Hatchavanich, D (2014b). A Comparison of Type I Error and Power of Statistics for Homogeneity of

Variance Tests. *Journal of Science Ladkrabang*, *23*(1), 17-28.

Levene, H. (1960). *Robust Testes for Equality of Variances, In Contributions to Probability and Statistics.* California: Stanford University Press.

Lim, T. S. & Loh, W. Y. (1996). *A comparison of tests of equality of variances*. Retrieved from https://www.researchgate.net/publication/4891098

Neuhauser, M. (2007). A comparative study of nonparametric two-sample tests after Levene's transformation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, *77*(6), 517-526.

O'Brien, R. G. (1981). A simple test for variance effects in experimental designs. *Psychological Bulletin*, *89*(3), 570.

Underwood, A. J. (1997). *Experiments in ecology: their logical design and interpretation using analysis of variance*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wludyka, P. S., & Nelson, P. R. (1997). An analysis-of-means-type test for variances from normal populations. *Technometrics*, *39*(3), 274-285.

Zhang, S. (1998). Fourteen homogeneity of variance tests: when and how to use them. Retrieved from http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED422392.pdf