ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส กับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ยุพร ริมชลการ

The Relationship Between the Area of Archimedes' Parabolic Segment and the Area of Archimedes' Triangle

Yuporn Rimcholakarn

คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงคราม จังหวัดพิษณุโลก 65000
Faculty of Science and Technology, Pibulsongkram Rajabhat University, Phitsanulok, Thailand 65000
Corresponding author. E-mail address: rimcholakarn@yahoo.co.th
Received: 15 February 2016; Accepted: 24 May 2016

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสและความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสโดยใช้วิธีการของแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ ซึ่งผลการศึกษาพบว่า เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสมีพื้นที่เท่ากับ 4/3 เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลา รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสมีพื้นที่เท่ากับ 2 เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลา และ พื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสมีความสัมพันธ์กันโดยที่เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสมีพื้นที่เท่ากับ 2/3 เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

คำสำคัญ: เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

Abstract

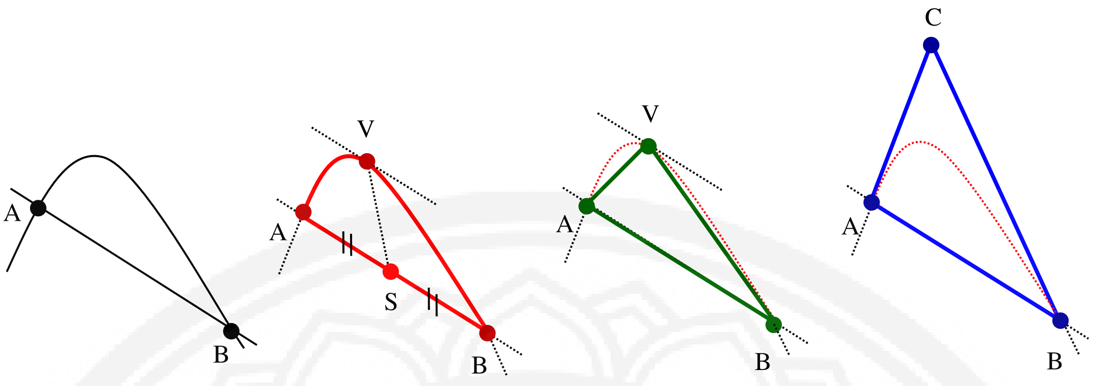
The purposes of this article were to study the area of Archimedes' parabolic segment, the area of Archimedes' triangle and the relationship of the area of Archimedes' parabolic segment and Archimedes' triangle by using calculus and analytic geometry method. The results showed that the area of Archimedes' parabolic segment was 4/3 times as the area of inscribed triangle, the area of Archimedes' triangle was 2 times as the area of inscribed triangle and the area of Archimedes' parabolic segment was 2/3 times as the area of Archimedes' triangle.

Keywords: Archimedes' parabolic segment, Archimedes' triangle

บทนำ

อาร์คิมีดีส (Archimedes) นักคณิตศาสตร์ชาวกรีก (287-212 ปี ก่อนคริสต์ศักราช) ได้ใช้ระเบียบวิธีเกษียณ (method of exhaustion) รวมทั้งวิธีเชิงกลศาสตร์ (method of mechanics) ในการศึกษาสมบัติของเซกเมนต์พาราโบลาและสร้างทฤษฎีบทเกี่ยวกับเซกเมนต์พาราโบลา (Heath, 1897; Stein, 1999; Broline, 2009; Hahn, 2010; Seely, 2014) ซึ่งถือเป็นข้อค้นพบที่มีชื่อเสียงและได้รับการยกย่องจากนักคณิตศาสตร์ในยุคหลัง

เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส (Archimedes' Parabolic Segment) หมายถึง อาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยโค้งพาราโบลาและคอร์ดที่ลากเชื่อมจุดสองจุดซึ่งอยู่บนโค้งพาราโบลานั้น (Erbas, 2000) และเมื่อลากเส้นตรงสัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุดปลายทั้งสองของคอร์ดไปพบกันที่จุดภายนอกของเซกเมนต์พาราโบลาจะเกิดรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส (Archimedes' Triangle) ซึ่งหมายถึง รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานเป็นคอร์ดของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและมีด้านสองด้านเป็นเส้นสัมผัสที่สัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุดปลายทั้งสองของคอร์ด (Woltermann, 2014)



(1.1) (1.2) (1.3) (1.4)

รูปที่ 1 เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

โค้งพาราโบลาตัดกับคอร์ด AB ที่ จุด A และ จุด B (รูปที่ 1.1) ให้ จุด V เป็นจุดสัมผัสที่เกิดจากเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับโค้งพาราโบลาและขนานกับคอร์ด AB เรียก เซกเมนต์ ABV ว่า เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส (รูปที่ 1.2) เรียก คอร์ด AB ว่า ฐาน (base) เรียก จุด V ว่า จุดยอด (vertex) เรียก เส้น VS ซึ่งลากจากจุดยอดยอดมาแบ่งครึ่งฐาน AB ที่จุด S ว่า แกน (axis) โดยมี รูปสามเหลี่ยม ABV เป็นรูปสามเหลี่ยมแนบใน (inscribed triangle) เซกเมนต์พาราโบลาซึ่งมีฐานเดียวกันและมีจุดยอดร่วมกัน (รูปที่ 1.3) เรียก รูปสามเหลี่ยมที่มีฐาน AB ร่วมกับเซกเมนต์พาราโบลาและมีด้านทั้งสอง คือ ด้าน AC และ ด้าน BC เป็นเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาที่ จุด A และ จุด B ลากมาพบกันที่จุด C ว่า รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส (รูปที่ 1.4)

เนื่องจากเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสมีความเกี่ยวข้องสัมพันธ์ในเชิงโครงสร้าง กล่าวคือ เป็นรูปเรขาคณิตที่มีฐานร่วมกันและด้านทั้งสองด้านของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสก็คือเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุดปลายทั้งสองของฐานของเซกเมนต์พาราโบลา ดังนั้นในการศึกษาครั้งนี้จึงมีวัตถุประสงค์เพื่อ หาพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสและมุ่งอธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสโดยใช้วิธีการของแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์อันเป็นการขยายขอบเขตความรู้ทางคณิตศาสตร์ให้กว้างขวางยิ่งขึ้น

วิธีการศึกษาและวัสดุอุปกรณ์

การวิจัยเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสดำเนินการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

ศึกษาความรู้พื้นฐาน โดยการศึกษาบทนิยามเกี่ยวกับเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส พิสูจน์ทฤษฎีบทและบทแทรกที่เกี่ยวข้องเพื่อสร้างความรู้พื้นฐานสำหรับการวิจัย

หาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลา เป็นการดำเนินการเพื่อให้ได้มาซึ่งพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลาโดยใช้วิธีการของเรขาคณิตวิเคราะห์ เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์

หาพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส เป็นการใช้วิธีการทางแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์โดยการประยุกต์ความรู้เรื่องปริพันธ์เพื่อหาพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส

หาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส เป็นการแสดงการพิสูจน์เพื่อหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสโดยใช้ความรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตของยุคลิด

หาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส เป็นการแสดงการเปรียบเทียบพื้นที่ของรูปเรขาคณิตทั้งสองโดยใช้อัตราส่วน

ผลการศึกษา

1. ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 1 เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส (Archimedes' Parabolic Segment) หมายถึง อาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยโค้งพาราโบลาและคอร์ดที่ลากเชื่อมจุดสองจุดซึ่งอยู่บนโค้งพาราโบลานั้น

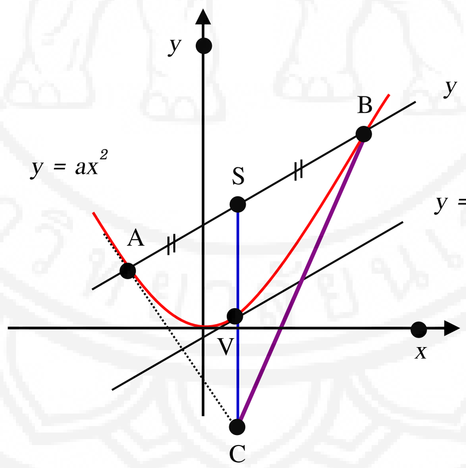
บทนิยาม 2 รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส (Archimedes' Triangle) หมายถึง รูปสามเหลี่ยมที่มีฐานเป็นคอร์ดของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสและมีด้านสองด้านเป็นเส้นตรงที่สัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุดปลายทั้งสองของคอร์ด

ทฤษฎีบทของอาร์คิมีดีส (The Archimedes' Proposition) สำหรับเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสใด ๆ ถ้าลากเส้นตรงจากจุดกึ่งกลางฐานผ่านจุดยอดไปตัดกับเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาซึ่งมีจุดปลายของฐานเป็นจุดสัมผัสแล้วระยะจากจุดกึ่งกลางฐานถึงจุดยอดจะเท่ากับระยะจากจุดยอดถึงจุดตัด

การพิสูจน์ทฤษฎีบทของอาร์คิมีดีสประยุกต์จากแนวคิดของ Swain (2013) และ ภิญโญ มนูศิลป์ โดยใช้วิธีการของแคลคูลัสและเรขาคณิตวิเคราะห์ (Seely, 2014; Manoosilp, 2014) ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ ดังนี้

เซกเมนต์พาราโบลา ABV เกิดจากเส้นตรง $y = mx + c$ ตัดกับโค้งพาราโบลา $y = ax^2$ เมื่อ $a \neq 0$ ที่จุด A และจุด B โดยมีเส้นตรง $y = mx + b$ ขนานกับฐาน AB และสัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุดยอด V ให้ S เป็นจุดกึ่งกลางของฐาน AB และเส้นตรง SV เป็นแกนของเซกเมนต์พาราโบลา ABV ลากต่อเส้นตรง SV ไปทางจุด V พบเส้นสัมผัสโค้งพาราโบลาซึ่งลากมาจากจุดสัมผัส B ที่ จุด C

ต้องการพิสูจน์ว่า VS = VC



รูปที่ 2 แสดงการพิสูจน์ทฤษฎีบทของอาร์คิมีดีส

การพิสูจน์

เนื่องจากจุด A และจุด B เป็นจุดตัดของพาราโบลา $y = ax^2$ และเส้นตรง $y = mx + c$

จะได้พิกัดของจุด B คือ $\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \dfrac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของจุด A คือ $\left(\dfrac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \dfrac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

เพราะว่าจุด S เป็นจุดกึ่งกลางของฐาน AB

ดังนั้น พิกัดของจุด S คือ $\left(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{2a} + c\right)$

เพราะว่าจุด S และจุด V อยู่บนเส้นตรง $x = \frac{m}{2a}$

และ เนื่องจากจุด V เป็นจุดที่เส้นตรง $y = mx + b$ ซึ่งสัมผัสกับพาราโบลา $y = ax^2$

จะได้พิกัดของจุด V คือ $\left(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{4a}\right)$ -------------------- (1)

เพราะว่าเส้นตรง BC เป็นเส้นสัมผัสกับพาราโบลา $y = ax^2$ ที่ จุด B

จะได้ว่าความชันของเส้นสัมผัส BC คือ

$$y' = 2ax = 2a\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right) = m+\sqrt{m^2+4ac}$$

ดังนั้น สมการของเส้นสัมผัส BC คือ

$$y - \left(\frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right) = \left(m+\sqrt{m^2+4ac}\right)\left(x - \frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}\right)$$

$$y = \left(m+\sqrt{m^2+4ac}\right)x - \left(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}+m^2+2ac}{2a}\right)$$

เนื่องจาก สมการของเส้นตรง SC คือ $x = \frac{m}{2a}$

ดังนั้น ค่า y ของจุด C คือ

$$y = \left(m+\sqrt{m^2+4ac}\right)\left(\frac{m}{2a}\right) - \left(\frac{m\sqrt{m^2+4ac}+m^2+2ac}{2a}\right)$$

$$y = -c$$

จะได้ว่าพิกัดของจุด C คือ $\left(\frac{m}{2a}, -c\right)$

สมมุติให้จุด V' เป็นจุดกึ่งกลางของ เส้นตรง SC

เนื่องจาก จุดปลายของเส้นตรง SC อยู่ที่จุด S $\left(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{2a} + c\right)$ และ จุด C $\left(\frac{m}{2a}, -c\right)$

จะได้พิกัดของจุด V' คือ $\left(\frac{\frac{m}{2a}+\frac{m}{2a}}{2}, \frac{\frac{m^2}{2a}+c+(-c)}{2}\right)$

ดังนั้น จุดกึ่งกลางของเส้นตรง SC อยู่ที่ จุด $V'\left(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{4a}\right)$ ----------------- (2)

จะเห็นว่า (1) = (2) แสดงว่าจุด V และจุด V' คือจุดเดียวกัน

ดังนั้น จุด V คือจุดกึ่งกลางของเส้นตรง SC

นั่นคือ VS = VC ■

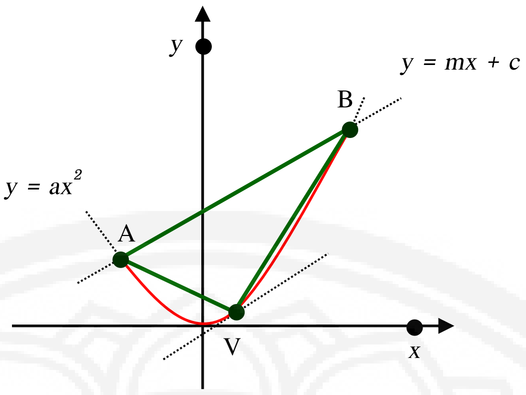
(กรณีเส้นตรง AC ซึ่งสัมผัสโค้งพาราโบลาที่จุด A ก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน)

ผลจากการพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้นจะพบว่า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

2. พื้นที่รูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส

ให้เซกเมนต์พาราโบลา ABV เกิดจากเส้นตรง $y = mx + c$ ตัด พาราโบลา $y = ax^2$ เมื่อ $a \neq 0$ ที่จุด A และจุด B โดยมีเส้นตรง AB เป็นฐานจุด V เป็นจุดยอด และรูปสามเหลี่ยม ABV เป็นรูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส

ต้องการหา พื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส ABV



รูปที่ 3 รูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABV ซึ่งเป็นรูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลาสามารถหาได้ ดังนี้

จากทฤษฎีบทของอาร์คิมีดีส จะได้ว่าจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABV มีพิกัด ดังนี้

พิกัดของจุด B คือ $\left(\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของจุด A คือ $\left(\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}, \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a}\right)$

พิกัดของจุด V คือ $\left(\frac{m}{2a}, \frac{m^2}{4a}\right)$

ให้ K แทนพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABV

$$\text{ดังนั้น } K = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{cc} \frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a} & \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a} \\ \frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a} & \frac{m^2-m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a} \\ \frac{m}{2a} & \frac{m^2}{4a} \\ \frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a} & \frac{m^2+m\sqrt{m^2+4ac}+2ac}{2a} \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4ac\sqrt{m^3+4ac}+3m^3+m^2\sqrt{m^2+4ac}}{8a^2}\right)-\left(\frac{-4ac\sqrt{m^2+4ac}+3m^3-m^2\sqrt{m^2+4ac}}{8a^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4ac\sqrt{m^2+4ac}+3m^3+m^2\sqrt{m^2+4ac}+4ac\sqrt{m^2+4ac}-3m^3+m^2\sqrt{m^2+4ac}}{8a^2}\right]$$

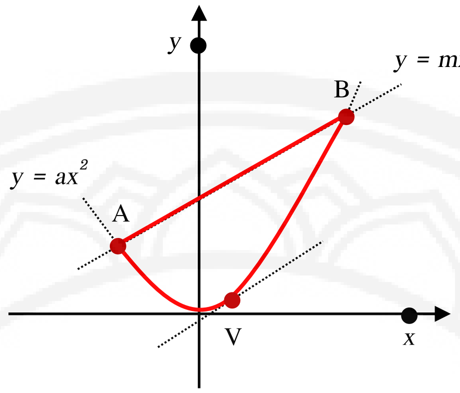
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{8ac\sqrt{m^2+4ac}+2m^2\sqrt{m^2+4ac}}{8a^2}\right]$$

$$= \frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{8a^2} \text{ ตารางหน่วย} \qquad \text{---------------- (3)}$$

นั่นคือ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลาเท่ากับ $\frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{8a^2}$ ตารางหน่วย ■

3. พื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส

ให้เซกเมนต์พาราโบลา ABV เกิดจากเส้นตรง $y = mx + c$ ตัดพาราโบลา $y = ax^2$ เมื่อ a ≠ 0 ที่ จุด A และจุด B โดยมีเส้นตรง AB เป็นฐานและจุด V เป็นจุดยอด



รูปที่ 4 เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส

พื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส ABV สามารถหาได้ ดังนี้

ให้ A แทนพื้นที่เซกเมนต์พาราโบลา ABV

เนื่องจากพาราโบลา $y = ax^2$ และเส้นตรง $y = mx + c$ ตัดกันที่จุด A และจุด B

ดังนั้น $$A = \int_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}} [(mx+c)-ax]dx$$

$$= \left[c\,(x) + m\left(\frac{x^2}{2}\right) - a\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}$$

$$= c\,(x)\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}} + m\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}} - a\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{m-\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}^{\frac{m+\sqrt{m^2+4ac}}{2a}}$$

$$= \frac{c\sqrt{m^2+4ac}}{a} + \frac{m^2\sqrt{m^2+4ac}}{2a^2} - \left(\frac{m^2\sqrt{m^2+4ac}+ac\sqrt{m^2+4ac}}{3a^2}\right)$$

$$= \frac{6ac\sqrt{m^2+4ac}+3m^2\sqrt{m^2+4ac}-2m^2\sqrt{m^2+4ac}-2ac\sqrt{m^2+4ac}}{6a^2}$$

$$= \frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{6a^2}$$ ตารางหน่วย --------------- (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ว่า $$\frac{A}{K} = \frac{\dfrac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{6a^2}}{\dfrac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{8a^2}}$$

ดังนั้น $$A = \left(\frac{4}{3}\right)K$$

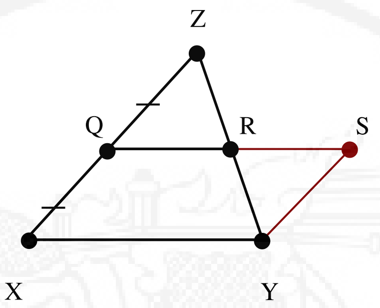
กล่าวได้ว่าพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลา ABV เท่ากับ 4/3 เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABV

นั่นคือ พื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสเท่ากับ 4/3 เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลา ■

บทแทรก สำหรับรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เส้นตรงที่ลากจากจุดกึ่งกลางด้าน ๆหนึ่งและขนานกับอีกด้านหนึ่งย่อมแบ่งครึ่งด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมรูปนั้น

กำหนดให้ XYZ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จุด Q เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน XZ ลากเส้นตรง QR ให้ขนานกับด้าน XY พบด้าน YZ ที่จุด R

ต้องการพิสูจน์ว่า จุด R เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน YZ



รูปที่ 5 การลากเส้นตรงจากจุดกึ่งกลางด้านของรูปสามเหลี่ยม

การพิสูจน์

ลากต่อเส้นตรง QR ให้ถึงจุด S โดยให้เส้นตรง QS ยาวเท่ากับด้าน XY แล้วลากเส้นตรง YS

จะได้ว่าเส้นตรง QS ขนานและยาวเท่ากับเส้นตรง XY

เนื่องจากเส้นตรง XQ และเส้นตรง YS เป็นเส้นตรงปิดหัวท้ายของเส้นคู่ขนานที่ยาวเท่ากัน

เป็นผลให้เส้นตรง XQ ขนานและยาวเท่ากับเส้นตรง YS

จุด Q เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน XZ กล่าวได้ว่าเส้นตรง XQ ยาวเท่ากันกับเส้นตรง QZ

จะได้ว่าเส้นตรง QZ ขนานและยาวเท่ากับเส้นตรง YS

เนื่องจากเส้นตรง QZ ขนานกับเส้นตรง YS โดยสมบัติการเท่ากันของมุมแย้งภายในเส้นคู่ขนานเดียวกัน

เป็นผลให้มุม ZQR มีขนาดเท่ากับมุม RSY และมุม QZR มีขนาดเท่ากับมุม RYS

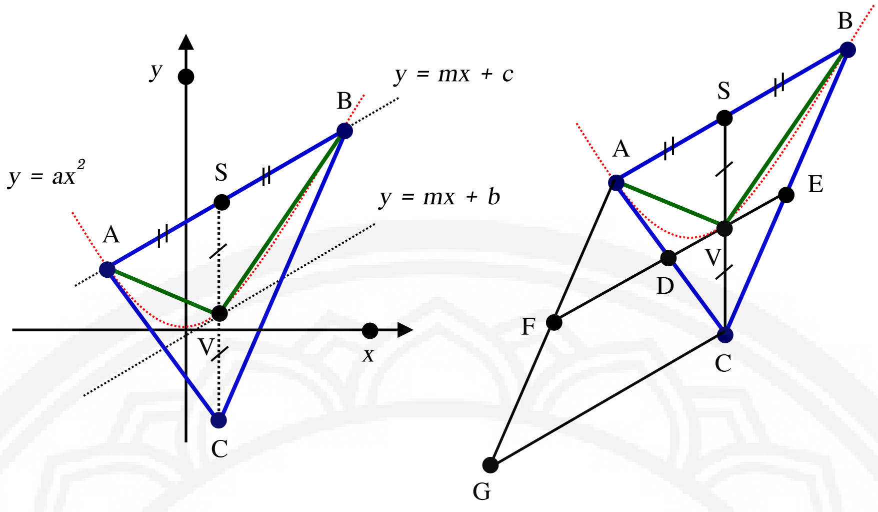
กล่าวได้ว่ารูปสามเหลี่ยม QZR เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม RYS (มุม-ด้าน-มุม)

ดังนั้นจะได้ว่าเส้นตรง ZR ยาวเท่ากับเส้นตรง RY

นั่นคือ จุด R เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน YZ ■

4. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสซึ่งมีฐาน AB ร่วมกับเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส ABV ซึ่งเกิดจากเส้นตรง $y = mx + c$ ตัดพาราโบลา $y = ax^2$ เมื่อ $a \neq 0$ โดยมี ABV เป็นรูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลา (รูปที่ 6.1)



รูปที่ 6 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC สามารถหาได้ดังนี้

ลากเส้นตรง $y = mx + b$ ตัดด้าน AC และด้าน BC ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ABC ที่จุด D และจุด E ตามลำดับ จากจุด C ลากเส้นตรง CG ให้ขนานกับฐาน AB จากจุด A ลากเส้นตรง AG ให้ขนานกับด้าน BC ตัดเส้นตรง CG ที่จุด G และต่อเส้นตรง ED พบกับเส้นตรง AG ที่จุด F (รูปที่ 6.2)

จะได้ว่า ABEF และ ABCG เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยม ABV มีฐาน AB ร่วมกันกับรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABEF

จะได้ว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABEF = 2 เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABV

เนื่องจาก รูปสามเหลี่ยม ABC มีฐาน AB ร่วมกันกับ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCG

จะได้ว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCG = 2 เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

จุด V เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CS ของรูปสามเหลี่ยม BCS จากบทแทรกกล่าวได้ว่าจุด E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC ดังนั้นเส้นตรง BE ยาวเท่ากับเส้นตรง EC

จะได้ว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCG = 2 เท่าของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABEF

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC = พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABEF

จะได้ว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC = 2 เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABV

$$\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC} = (2)\left[\frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{8a^2}\right]$$

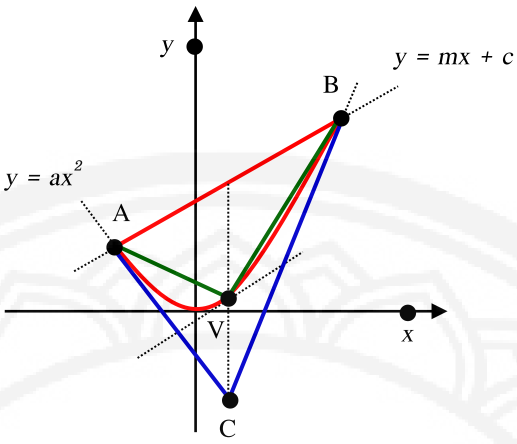
$$= \frac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{4a^2} \text{ ตารางหน่วย} \quad \text{--------} \quad (5)$$

นั่นคือ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสเท่ากับสองเท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลา ■

5. ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

ให้เซกเมนต์พาราโบลา ABV รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม ABV เป็นเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส รูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสและรูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลาตามลำดับซึ่งเกิดจากเส้นตรง

$y = mx + c$ ตัดพาราโบลา $y = ax^2$ เมื่อ $a \neq 0$



รูปที่ 7 ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส

จาก (4) และ (5) จะได้ว่า

พื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส $= \dfrac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{6a^2}$ ตารางหน่วย

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส $= \dfrac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{4a^2}$ ตารางหน่วย

ดังนั้น

$$\frac{\text{พื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมี}}{\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส}} = \frac{\dfrac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{6a^2}}{\dfrac{(m^2+4ac)\sqrt{m^2+4ac}}{4a^2}}$$

นั่นคือ พื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสเท่ากับ 2/3 เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ■

อภิปรายผลการศึกษา

การดำเนินการวิจัยครั้งนี้เป็นการผสมผสานความรู้ทางคณิตศาสตร์หลายสาขา เช่น แคลคูลัส เรขาคณิตวิเคราะห์ เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์รวมถึงการพิสูจน์เรขาคณิตแบบยุคลิด เพื่อนำมาใช้ในการหาพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีส พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสและความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสกับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสโดยผลจากการวิจัยมีความสอดคล้องกับการพิสูจน์แบบดั้งเดิมซึ่งใช้การพิสูจน์โดยใช้ระเบียบวิธีเกษียณแต่วิธีการผสมผสานความรู้ในการวิจัยครั้งนี้มีความกระชับ เข้าใจง่ายและมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น อย่างไรก็ดียังมีสมบัติของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสอื่น ๆ อีกหลายแง่มุมที่น่าสนใจที่ควรนำมาศึกษาในแนวทางของคณิตศาสตร์แผนใหม่ในลำดับต่อไป

สรุปผลการศึกษาและข้อเสนอแนะ

ผลสรุปจากการวิจัยในครั้งนี้ คือ พื้นที่ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสเท่ากับ 4/3 เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลา พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสเท่ากับ 2 เท่าของพื้นที่รูปสามเหลี่ยมแนบในเซกเมนต์พาราโบลา และ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีสมีความสัมพันธ์กันโดยที่เซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดีสมีพื้นที่เท่ากับ 2/3 เท่าของพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดีส ผลสรุป

ดังกล่าวสามารถนำไปเป็นแนวทางในการศึกษาวิจัยเพิ่มเติมในโอกาสต่อไปได้หลายประเด็น เช่น ควรศึกษาโดยการใช้สมการพาราโบลาในรูปแบบอื่น ๆที่มีแกนของพาราโบลาและจุดยอดอยู่ในตำแหน่งที่แตกต่างออกไป ควรมีการวิจัยต่อยอดเกี่ยวกับการหาพื้นที่และจุดเซนทรอยด์ของเซกเมนต์พาราโบลาของอาร์คิมีดิสโดยใช้นวัตกรรมหรือเทคโนโลยีทางคณิตศาสตร์ตลอดจนควรมีการศึกษาวิจัยเกี่ยวกับสมบัติของเส้นออยเลอร์ในกรณีที่เส้นดังกล่าวเกิดขึ้นภายในรูปสามเหลี่ยมของอาร์คิมีดิสเป็นต้น

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.ภิญโญ มนูศิลป์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏเลย ที่ได้ให้เสนอข้อวิพากษ์เชิงวิชาการเพื่อนำไปสู่การกำหนดแนวคิดในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ และขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏพิบูลสงครามที่ได้จัดสรรเงินทุนสนับสนุนการศึกษาวิจัยจนทุกอย่างบรรลุความสำเร็จด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

Broline. D. (2009). *Quadrature of Parabola*. Retrieved from www.ux1.eiu.edu/~cfdmb/4900/archmedes.pdf

Erbas, K. A. (2000). *An Explanatory Approach to Archimedes's Quadrature of the Parabola*. Retrieved from http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT668.F99/Erbas/emat6690/essay1/essay1.html

Hahn, A. I. (2010). *Basic Calculus from Archimedes to Newton to its Role in Science*. University of Notre Dame: Springer.

Heath, T. L. (1897). *The Works of Archimedes*. New York: Dover Publications.

Manoosilp, P. (2014). The relationship between the Centroid of Archimedes' Parabolic Segment and the Centroid of Archimedes' Triangle. *Srinakharinwirot Science Journal*, *30*(2), 151-165.

Seely, R. (2014). *Archimedes' Quadrature of Parabola and the Method of Exhaustion*. Retrieved from www.math.mcgill.ca/rags/JAC/NYB/exhaustion2.pdf

Stein, S. (1999). *Archimedes What Did He do Besides Cry Eureka?* New York: Mathematical Association of America.

Swain, G. A. (2013). Archimedes Curves. *The College Mathematics Journal*, *44*(3), 185-189.

Woltermann, M. (2014). *Archimedes' Squaring of Parabola*. Retrieved from www2.washjeff.edu/users/mwoltermann/Dorrie/56.pdf